

ROBERTO ANDRADE FERNANDES

CARTOGRAFIA NAÚTICA: AEROTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA EM CONFIGURAÇÃO ANALÓGICA

Dissertação apresentada ao Curso de  
Pós-Graduação em Ciências Geodésias  
para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências pela Universidade Federal  
do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1984

CARTOGRAFIA NÁUTICA: AEROTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA EM CONFIGURAÇÃO ANALÓGICA

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em  
Ciências Geodésicas para obtenção do Grau  
de Mestre em Ciências pela Universidade  
Federal do Paraná.

por

ROBERTO ANDRADE FERNANDES, Capitão-de-Fragata, hidrográfo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1984

BANCA EXAMINADORA:

  
Dr. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

  
Msc. FRANÇOIS ALBERT ROSIER

  
Dr. JOÃO BOSCO LUGNANI - Orientador

Para Martha, Renato e Beatriz  
com amor.

A todos que tornaram possível este trabalho, reconheço  
minha dívida e expresso minha gratidão. Seus nomes não estão impressos  
aqui e sim onde não podem ser apagados.



*"The fountains are dusty in the Graveyard of Dreams; the hinges are rusty and swing with tiny screams.*

*We sit in the twilight, the shadows among, and we talk of the happy days when we were brave and young".*

*GRAVEYARD OF DREAMS*

## SINOPSE

Este trabalho está dividido em uma introdução e quatro capítulos. A introdução pretende situar o leitor no ambiente da Cartografia Náutica, abordando alguns de seus problemas específicos; no Capítulo 1 é apresentada uma visão geral da aerotriangulação, sendo introduzidos os conceitos que permitirão o tratamento analítico do problema; no Capítulo 2 é obtido o modelo matemático que descreve, aproximadamente, a realidade física e, no Capítulo 3 são abordados e apresentada a forma de tratar os erros sistemáticos presentes no processo, de forma a que a realidade se aproxime do modelo matemático. Finalmente, no Capítulo 4, é descrito o desenvolvimento teórico do que seria a solução simultânea, pelo método dos mínimos quadrados, dos problemas da aerotriangulação e ajustamento. Ainda no Capítulo 4, são apresentados o fluxo lógico dos dados ao longo do sistema e a sequência de passos a seguir na implantação do processo, bem como seu fluxograma. Em apêndice são apresentadas as instruções e o programa de processamento relativos ao processo descrito.

## SYNOPSIS

*This paper is divided into an introduction and four chapters. The introduction aims to provide the readers with a picture of Nautical Cartography, discussing some of its specific difficulties. Chapter 1 introduces a general scope of triangulation as well as the concepts by which those difficulties may be analytically dealt with; Chapter 2 provides the mathematical model that approximately describes the physical reality and Chapter 3 includes the means by which the systematic errors inherent to the process can be solved for in order to enable the compliance of the physical reality with the mathematical model provided. Finally, in Chapter 4 the theoretical development of a simultaneous solution by means of least squares adjustment is described, for the aerotriangulation problem. Moreover, Chapter 4, includes the logical flow of data along the system and the steps to be followed for the implantation of the process as well as its flowchart. In the appendix the instructions and the computer program related with the process previously described are presented.*

## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
TÍTULO .....	ii
DEDICATÓRIA .....	iii
AGRADECIMENTO .....	iv
SINOPSE .....	vi
SYNOPSIS .....	vii
SUMÁRIO .....	viii
<u>INTRODUÇÃO</u> .....	x
<u>CAPÍTULO 1 - VISÃO GERAL DA AEROTRIANGULAÇÃO</u> .....	
1.1 - Notícia sobre os métodos de aerotriangulação .....	8
1.2 - Notícia sobre os equipamentos utilizados em aerotriangulação .....	10
1.3 - Sistemas de Coordenadas .....	15
1.3.1 - Apresentação do problema .....	15
1.3.2 - Definição dos sistemas de coordenadas .....	15
1.3.3 - Transformação de coordenadas .....	24
1.4 - Transformações geométricas .....	30
1.4.1 - Apresentação do problema .....	30
1.4.2 - Transformações ortogonais .....	31
1.4.3 - Transformações de similaridade .....	33
1.4.4 - Transformações afim .....	36
1.4.5 - Transformações projetivas .....	37
1.4.6 - Transformações polinomiais .....	37
<u>CAPÍTULO 2 - OBTENÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DA AEROTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA</u> .....	40
2.1 - Apresentação do problema .....	41
2.2 -- Obtenção do modelo matemático da aerotriangulação analítica .....	42
<u>CAPÍTULO 3 - OS ERROS SISTEMÁTICOS E SUA CORREÇÃO</u> .....	
3.1 -- Apresentação do problema .....	49
3.2 - O "trabalho" do filme .....	50
3.2.1 - Transformação das coordenadas instrumentais para coordenadas fiduciais .....	53

	<u>Pág.</u>
3.3 - Distorções das lentes .....	72
3.4 - Refração fotogramétrica .....	77
<u>CAPÍTULO 4 - AEROTRIANGULAÇÃO E AJUSTAMENTO: SOLUÇÃO PELO MÉTODO</u> <u>DOS MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ) .....</u>	
4.1 - Apresentação do problema .....	86
4.2 - Descrição do processo: ajustamento dos feixes perspecti- vos do bloco de fotografias usando o MMQ (método paramê- trico) .....	89
4.3 - Obtenção dos valores aproximados dos parâmetros .....	101
4.4 - Derivadas envolvidas .....	104
4.5 - Macro-fluxograma do processo .....	106
4.6 - Conclusões e recomendações .....	113
NOTAS DE REFERÊNCIAS .....	114
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	116
APÊNDICES .....	119

## INTRODUÇÃO:

A Carta Náutica:

o que é;

para que serve;

que informações contêm;

como se divide;

recomendações da Organização Hidrográfica Internacional (OHI);

notícia sobre o levantamento hidrográfico.

Utilização da Fotogrametria no processo de construção ou atualização da carta náutica.

Definições dos limites do presente trabalho.

## A CARTA NAÚTICA

A carta náutica é a representação cartográfica de uma porção da superfície terrestre e se destina a permitir que a navegação marítima se faça com segurança no trecho representado. Além de sua destinação básica - a navegação marítima - a carta náutica pode se constituir em importante subsídio para estudos de engenharia costeira, de oceanografia, de problemas de pesca e de circulação oceânica à superfície, de questões sócio-econômicas na área litorânea e outros. Por se referir, muitas vezes, a uma zona em estado de rápida evolução - evolução essa gerada por causas naturais ou provocada pelo homem - a carta náutica exige constante atualização para que sua finalidade possa ser atingida. Inexistindo um intenso esforço de manutenção, todo o trabalho desenvolvido no levantamento hidrográfico, visando permitir a construção da carta, perde boa parte de sua razão de ser.

As principais informações que uma carta náutica deve conter são [01]:

- profundidades em relação a um nível de referência;
- posição, tipo e cota dos perigos à navegação;
- morfologia do fundo, traduzida pela batimetria e curvas isobatiométricas;
- linha de contorno da costa;
- fundeadouros e natureza da superfície do fundo em suas proximidades;
- correntes marítimas à superfície;
- representação topográfica da costa, com relevância para as características, naturais ou não, susceptíveis de serem utilizadas como ajudas à navegação;
- toponímia dos acidentes litorâneos;
- auxílios à navegação (luzes, bóias, faróis, rádio-faróis, etc);
- obras portuárias, áreas de atracação e edificações de interesse para as atividades marítimas;
- limites marítimos diversos (áreas de fundeio, de fundeio proibido, de quarentena, de exercícios de tiro, etc...);
- declinação magnética e sua variação;
- elementos de marés;
- informações complementares (datas do levantamento e das atualiza-

zações, "data" utilizados, escalas, sistema de projeção empregado, tabelas para conversão de unidades, precauções a serem observadas pelos navegantes, etc...).

As cartas náuticas podem se apresentar sob a forma de [02]:

- planos hidrográficos, de escala igual ou superior a 1/50 000, representando portos, barras, fundeadouros ou zonas de perigo;
- cartas de aproximação, de escala entre 1/50 000 e 1/150 000, destinadas a permitir a demanda de portos ou outras áreas de convergência da navegação marítima;
- cartas de cabotagem, de escala entre 1/50 000 e 1/250 000, destinadas a navegação de cabotagem,
- cartas gerais, de escala entre 1/250 000 e 1/1000 000, representando trechos longos, destinados à navegação ao largo e a permitir planejamentos;
- cartas de praticagem, destinadas à navegação em rios ou outros locais em que a navegação pelos métodos convencionais é substituída por uma navegação de praticagem; nessas cartas, normalmente, o apoio terrestre é deficiente;
- cartas de escala muito pequena (1/1000 000 ou menores), destinadas a permitir o acompanhamento da navegação oceânica, planejamentos muito gerais e controle do tráfego marítimo;
- cartas especiais, como as cartas Loran, Decca, Omega (destinadas a permitir a plotagem da posição obtida por meio desses equipamentos), cartas gnomônicas (destinadas a auxiliar o planejamento de rotas ortodrômicas), folhas de plotagem de posição (contendo apenas a rede de meridianos e paralelos e destinadas ao controle da navegação em águas oceânicas, utilizando-se escalas compatíveis com o controle desejado), cartas de pesca (além das informações necessárias à navegação, contêm informações especificamente destinadas a esse tipo de atividade, tais como: espécies encontradas na área abrangida pela carta, "habitat" dessas espécies, temperatura da água do mar a vários níveis de profundidade, sua salinidade, condições meteorológicas predominantes na área, etc...) e cartas para fins militares (cartas sonar, cartas de bombardeio, cartas de desembarque, etc...).



O "Repertório de Resoluções Técnicas", da Organização Hidrográfica Internacional, constitui uma minuciosa coleção de recomendações sobre as cartas náuticas e outras publicações de uso do navegante. No que tange à carta náutica, trata de sistemas de projeção a serem usados, escalas, "data", unidades, legendas a serem incluídas no espaçamento entre transformadas de meridianos e paralelos, símbolos e abreviaturas adotados e mais uma extensa lista de itens que importam à construção da carta náutica e à sua atualização, em um esforço para assegurar que requisitos mínimos sejam cumpridos, bem como um mínimo de padronização seja alcançado, visando tornar a leitura de cartas, produzidas por diferentes Serviços, mais fácil para o utilizador. Por apresentarem interesse à aerotriangulação (ou à restituição fotogramétrica) cita-se que existem recomendações no sentido de que:

- as altitudes devem ser referidas ao nível médio (NM) do mar, o qual constitui o datum para informações sobre cotas; o datum para batimetria (isto é, o plano ao qual são referidas as sondagens) deverá ser o nível de redução (NR), um nível abaixo do qual raramente (ou nunca) a maré desça; este datum (chamado de datum da carta náutica) deverá ser ligado com o datum utilizado como referência para os serviços terrestres (nível médio do mar - NM) (recomendação A2.5);

- o elipsóide internacional de referência<sup>1</sup> deve ser utilizado para propósitos hidrográficos (recomendação B1.1);

- as cartas náuticas devem ser produzidas na Projeção de Mercator, como princípio geral (recomendação B1.3);

- tanto quanto possível, escalas naturais múltiplas de dez devem ser utilizadas para as cartas náuticas (recomendação B1.4);

- os Serviços Hidrográficos devem adotar as providências cabíveis para obter os dados necessários a fim de que suas cartas náuticas possam mostrar as características do litoral utilizáveis na navegação radar<sup>2</sup> (recomendação B2.25);

<sup>1</sup> Refere-se ao elipsóide de Hayford (1909), adotado em Madri (1924) pela Associação Internacional de Geodésia.

<sup>2</sup> A generalização do uso do radar na navegação marítima tornou a representação do relevo na carta náutica de grande interesse; um determinado trecho do litoral pode ser reconhecido não apenas pelo seu aspecto visual, mas, também, por sua imagem fornecida pelo radar; o horizonte do navegante foi ampliado de "visual" para "radar"; como resultado, de talhes mais para o interior passaram a ter importância e passaram a ser representados. Em suma: a representação topográfica da zona costeira na carta náutica é considerada essencial à segurança da navegação. Outros argumentos podem ser invocados, ainda, no sentido de que uma atualizada representação topográfica da zona costeira esteja presente nas cartas náuticas.

- nas cartas náuticas, a linha da costa deve ser representada pela marca da maré alta; em áreas costeiras cobertas por pântanos ou mangues a linha da costa deve ser representada pelo limite externo da vegetação que permanece acima da maré alta (recomendação B3.7).

Existem, também, várias recomendações relativas à inserção, nas cartas, de marcas conspícuas de terra, visíveis do mar, bem como recomendações relativas a símbolos a serem adotados.

O arcabouço da carta náutica é constituído por uma rede geodésica; deverá também a carta náutica dispor de informações topográficas compatíveis com a finalidade que pretende atingir<sup>3</sup>; a batimetria é obtida por meio de sondagens e são realizadas, ainda, operações destinadas a obter os parâmetros do campo magnético terrestre, os elementos de marés destinados a permitir a análise e o estabelecimento dos planos de referência para contagem de altitudes e profundidades, observações visando a obtenção de parâmetros meteorológicos e oceanográficos e ainda outras operações destinadas à coleta das demais informações que compõem uma carta náutica. A topografia necessária à carta náutica pode ser obtida de forma eficiente e econômica a partir de um levantamento aerofotogramétrico, eventualmente complementado onde e como necessário por operações clássicas de topografia. Mesmo utilizando um único voo sobre a área a levantar, consistindo apenas de fotografias verticais obtidas de películas preto-e-branco e técnicas bastante convencionais, a fotografia aérea permite a obtenção da base topográfica e do detalhe topográfico necessários, além de, pela riqueza de informações que fornece, constituir uma valiosa indicação sobre a topografia submarina e um amplo campo de aplicação das técnicas de fotointerpretação.

<sup>3</sup> Como visto, a representação da topografia terrestre na carta náutica é essencial; por outro lado, essa representação não deve ser levada a um ponto tal que obscureça a clareza da carta náutica e a torne de difícil leitura para seu principal usuário, o navegante. Deve existir um ponto de equilíbrio que dependerá de cada caso. Assim, em cartas de escala muito pequena, não existem motivos para representar a topografia terrestre; já os planos hidrográficos e cartas de aproximação tendem a apresentar uma relativa riqueza de detalhes.

## UTILIZAÇÃO DA FOTOGRAMETRIA NO PROCESSO DE CONSTRUÇÃO OU ATUALIZAÇÃO DA CARTA NAÚTICA.

### DEFINIÇÃO DOS LIMITES DO PRESENTE TRABALHO

Para a carta náutica a aerofotogrametria permite a obtenção da topografia do litoral e a densificação de pontos geodésicos de ordem inferior, visando trabalhos de marés, apoio à sondagem e outros. Normalmente, o vôo fotogramétrico é executado antes do levantamento hidrográfico propriamente dito; assim, a contribuição da Fotogrametria irá desde as fases de reconhecimento do terreno e planejamento do levantamento hidrográfico até a fase de construção da carta, passando pela determinação da linha da costa, pela densificação de pontos de apoio e pela obtenção do detalhe topográfico; o serviço de campo a ser executado antes das operações de aerotriangulação e restituição fotogramétrica consistirá na identificação de pontos de apoio, na seleção e identificação de pontos conspícuos, passíveis de serem utilizados como auxílio à navegação e na identificação de características que devam ser incluídas nas cartas náuticas<sup>4</sup>. Convém considerar, ainda, que, para um país de extenso litoral, o levantamento fotogramétrico se torna de muita utilidade para trabalhos de revisão e atualização de levantamentos já executados, uma vez que os levantamentos fotogramétricos são, via de regra, mais rápidos e econômicos que os correspondentes serviços terrestres.

Em anos recentes a aplicação das técnicas de Fotointerpretação à fotografia obtida para fins de construção de cartas náuticas tem crescido muito, pela utilização de emulsão colorida e infra-vermelha; o trabalho das equipes de campo fica bastante reduzido nesse caso, e é possível localizar canais navegáveis, banco de areia, pedras à flor d'água ou levemente submersas, além de ser possível obter uma indicação muito boa do comportamento da batimetria da região, antes de iniciar os trabalhos de sondagem, já que a película colorida fornece alguma penetração na água<sup>5</sup>; a fotografia infra-vermelha, obtida em estágios pré-determinados

<sup>4</sup> *Observa-se que se admitiu que a fotografia aérea utilizada é preto-e-branco; caso seja possível usar fotografia colorida o trabalho de campo fica simplificado.*

<sup>5</sup> *Existem trabalhos visando a determinação de profundidade, em águas rasas, usando fotografias coloridas e aerotrianguladores convencionais ou "analytical plotter". Os resultados informados garantem boa qualidade nessa determinação.*

da maré<sup>6</sup>(e não deixada a situação da maré ao acaso, por ocasião do vôo) permite delinear a linha da costa correspondente à situação que se tem em vista. No caso em que não se dispõe desse auxílio, um procedimento que poderia ser adotado na delimitação da linha da costa para propósitos de cartografia náutica seria o de identificar a preamar média na fotografia, no campo, examinando marcas e outras características da linha da costa e, com o conhecimento da altura da preamar média em relação ao nível médio, obtido da análise da maré, seria possível, após a aerotriangulação, delimitar a linha da costa na restituição fotogramétrica, com rigor satisfatório; de forma análoga, mesmo quando não se dispõe de fotografias coloridas, a emulsão preto-e-branco fornece uma boa indicação quanto a contornos de bancos de areia, arrebentação, canais navegáveis, presença de perigos à navegação, características da região, etc..., devendo ser cuidadosamente examinada antes do início dos trabalhos de determinação da batimetria, uma vez que esses elementos importam tanto para a construção da carta como para o planejamento do levantamento hidrográfico.

Por exceder as limitações impostas ao presente trabalho, aqui não serão abordados, senão quando indispensáveis à compreensão e, mesmo assim, de passagem, procedimentos e técnicas relativos ao planejamento do vôo fotogramétrico<sup>7</sup>, reambulação, restituição e outras operações; limitar-se-á este trabalho a focar o problema da implantação da aerotriangulação analítica em uma configuração tipicamente imaginada para realizar fotogrametria analógica e, aparentemente, alcançada pelo rápido desenvolvimento experimentado pela técnica. Embora a configuração existente na Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN)<sup>8</sup> tenha sido tomada como modelo, o fato não deve ser encarado como uma limitação: qualquer organização que disponha de um aerotriangulador pode adotar as modernas técnicas que caracterizam a aerotriangulação analítica.

<sup>6</sup> *"Tide-controlled aerial photography"; observadores postados em estações maregráficas localizadas na área a ser levantada estabelecem comunicação via rádio com o avião fotogramétrico e permitem que o vôo se faça em um período de tempo correspondente a uma certa altura da maré.*

<sup>7</sup> *Convém lembrar apenas que, por se tratar de Cartografia Náutica, será desejável planejar o uso da menor escala de fotografia compatível com o trabalho; além de usar fotos obtidas com câmaras grande-angulares, adequadas para aerotrianguladores de primeira ordem; tais procedimentos permitirão realizar "saltos" sobre extensões de água onde a obtenção de pontos de apoio seria difícil.*

<sup>8</sup> *Órgão do Ministério da Marinha responsável, no Brasil, pelo levantamento e edição de cartas náuticas.*

Imagina-se ter deixado claro, ao longo dessa introdução, o valor que possui a fotografia aérea para a construção ou revisão de cartas ou mapas. Mais: pensa-se ser possível promover a atualização de técnicas em um ambiente que realiza fotogrametria analógica sem efetuar pesados investimentos em equipamentos de difícil manutenção, em um nível compatível com as necessidades do mapeamento sistemático, desde que se possua (ou seja possível obter) alguma capacidade de processamento.

## CAPÍTULO 1 - VISÃO GERAL DA AEROTRIANGULAÇÃO

- 1.1 - Notícia sobre os métodos de aerotriangulação
- 1.2 - Notícia sobre os equipamentos utilizados em aerotri-  
angulação
- 1.3 - Sistemas de Coordenadas
  - 1.3.1 - Apresentação do problema
  - 1.3.2 - Definição dos sistemas de coordenadas
  - 1.3.3 - Transformação de coordenadas
- 1.4 - Transformações geométricas
  - 1.4.1 - Apresentação do problema
  - 1.4.2 - Transformações ortogonais
  - 1.4.3 - Transformações de similaridade
  - 1.4.4 - Transformações afim
  - 1.4.5 - Transformações projetivas
  - 1.4.6 - Transformações polinomiais

## 1.1 - NOTÍCIA SOBRE OS MÉTODOS DE AEROTRIANGULAÇÃO

A aerotriangulação é um conjunto de operações de fotogrametria que permite determinar as coordenadas de pontos do terreno que tenham sido imageados em fotografias aéreas<sup>1</sup>, a partir de um reduzido número de pontos de apoio, de coordenadas determinadas no terreno e que possam ser identificados na fotografia. A aerotriangulação pode ser utilizada para suplementar o apoio de campo necessário à restituição fotogramétrica, com vista ao mapeamento, e pode ser usada visando a densificação de pontos para propósitos geodésicos, cadastrais ou de levantamento sistemático<sup>2</sup>.

A aerotriangulação, fundamentalmente, se vale das relações geométricas que existem entre fotografias aéreas adjacentes e pode ser realizada por métodos analógicos - a situação existente no momento da obtenção das fotografias é reproduzida, em escala, utilizando instrumentos aerotrianguladores de projeção ótica ou mecânica - ou por métodos analíticos - quando a situação é modelada matematicamente (e não reproduzida) - ou ainda por uma combinação dos métodos analógico e analítico: o método semi-analítico.

No método analógico (ou instrumental) - o primeiro a surgir após a triangulação radial<sup>3</sup> - é formado o par estereoscópico inicial, através de um processo de orientação progressiva, monta-se toda a faixa, referida ao sistema de coordenadas instrumentais do modelo inicial; a faixa pode ser montada continuamente, como nos instrumentos tipo Multiplex e Balplex, os quais dispõem de vários projetores, ou par a par, como nos instrumentos universais, de base inversível, que possuem apenas dois projetores; em qualquer caso, ocorre a formação analógica do modelo estereoscópico e a concatenação entre os modelos consecutivos é realizada analogicamente.

<sup>1</sup> Em todo este trabalho admite-se que a fotografia aérea é vertical, isto é, a inclinação do eixo ótico da câmara em relação à vertical não excede  $3^{\circ}$ .

<sup>2</sup> No contexto deste trabalho pretende-se que o erro inerente às determinações seja compatível com as redes geodésicas de terceira ordem.

<sup>3</sup> A triangulação radial apareceu em 1905 e pode ser considerada como uma aerotriangulação no plano.

No método semi-analítico de aerotriangulação cada modelo estereoscópico é formado independentemente e possui seu próprio sistema de coordenadas; a concatenação entre os modelos é feita analiticamente, assumindo-se um sistema arbitrário como referência; este pode ser o sistema de coordenadas de um dos modelos.

O grande desenvolvimento da aerotriangulação veio com a facilidade de acesso aos computadores; esses equipamentos permitiram que as relações geométricas entre as fotos adjacentes, antes estabelecidas por meios óticos ou mecânicos, fossem definidas utilizando-se métodos numéricos<sup>4</sup>; além disso, permitiram que vários erros sistemáticos - tratados de forma sumária na aerotriangulação analógica ou simplesmente ignorados - fossem modelados matematicamente. Deve-se acrescentar, ainda, que as manipulações instrumentais foram reduzidas ao mínimo e que é possível um ajustamento mais rigoroso dos valores obtidos. Assim, percebe-se que a diferença de precisão entre os dois métodos de aerotriangulação - analógico e analítico - é muito grande. Nesse sentido, é possível entender o método semi-analítico como uma tentativa de aproveitar melhor os equipamentos analógicos existentes, aliando suas características à disponibilidade de um computador. O presente trabalho pretende prosseguir nessa mesma lógica: respeitando o investimento já realizado em equipamentos aerotrianguladores/restituidores, aplicar-se-ão aos dados obtidos por meio desses equipamentos as modernas técnicas que caracterizam a aerotriangulação analítica, dentro do contexto da cartografia náutica. Se, por um lado, é possível argumentar que este trabalho não pode ambicionar ombrear-se em exatidão de resultados com sofisticados sistemas dotados de comparadores e restituidores analíticos, por outro lado tratar-se-á de demonstrar que a exatidão obtida é suficiente para projetos de mapeamento sistemático, a custo zero de investimento e mediante o uso de uma tecnologia domada.

<sup>4</sup> Uma descrição mais detalhada do método analítico de aerotriangulação é apresentada no capítulo seguinte.



## 1.2 - NOTÍCIA SOBRE OS EQUIPAMENTOS UTILIZADOS EM AEROTRIANGULAÇÃO

A aerotriangulação analógica é realizada usando-se equipamentos aerotrianguladores. Esses instrumentos combinam três sistemas distintos:

- um sistema de projeção, o qual cria um modelo estereoscópico do terreno, a partir das fotografias aéreas;
- um sistema ótico que permite ao operador do instrumento examinar o modelo estereoscópico do terreno;
- um sistema de medição, o qual torna possível efetuar (e registrar) medidas no modelo estereoscópico.

O sistema de projeção é formado por dois projetores<sup>1</sup> onde se situam os porta-placas; a projeção pode ser inteiramente ótica, mecânica ou ótica-mecânica. Normalmente, cada projetor é dotado de movimentos de rotação e translação em torno de eixos cartesianos<sup>2</sup>, movimentos esses destinados a tornar possível a recomposição, em escala, do terreno fotografado. Os movimentos estão esquematizados na Figura 1.2.1.

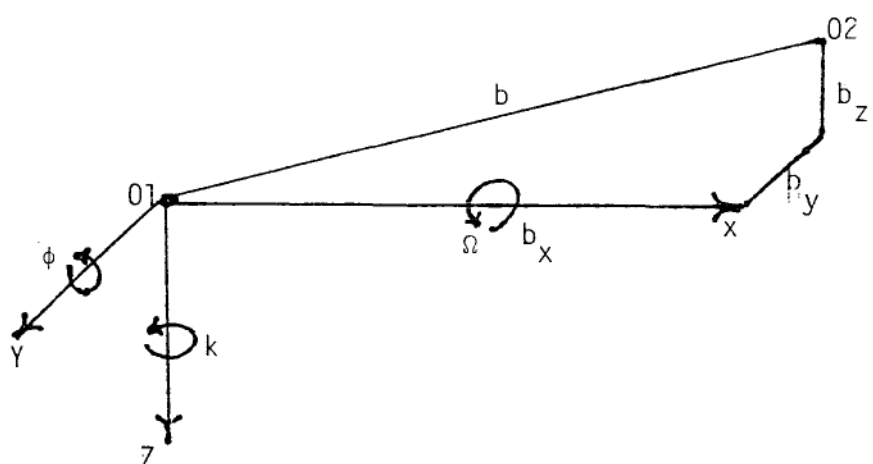


Fig. 1.2.1 - Nessa figura:  $b$ =base aérea;  $b_x$ ,  $b_y$ ,  $b_z$ =componentes da base aérea; são as translações ao longo dos eixos X, Y, Z, respectivamente;  $\Omega$ ,  $\phi$ ,  $k$ =rotações em torno dos eixos X, Y, Z, respectivamente.

Cada projetor, portanto possui seis movimentos, normalmente<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Os aparelhos mais antigos, formadores de faixas contínuas, como o *Multiplex* e *Balplex*, possuem um número maior de projetores.

<sup>2</sup> Os sistemas de coordenadas utilizados estão descritos no item 1.3.

<sup>3</sup> Podem existir diferenças de projeto.

Os instrumentos restituidores podem ser classificados de acordo com o "fator C"<sup>4</sup>:

1<sup>a</sup> ordem: fator C > 1000

2<sup>a</sup> ordem: 1000 > fator C > 800

3<sup>a</sup> ordem: 800 > fator C > 500

4<sup>a</sup> ordem: 500 > fator C > 200

Um exemplo de configuração projetada tipicamente para realizar fotogrametria analógica é a instalada na Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN), composta de um autógrafo WILD A9, dois aviôgrafos WILD B8, um transferidor de pontos WILD PUG3, um redutor WILD U3-A, estereoscópios de espelhos com barra de paralaxe, além de outros aparelhos auxiliares. O autógrafo WILD A9 é um estereoplotador universal (aerotriangulador e restituidor) que permite a utilização de fotografias tomadas com câmaras normais, grande angulares e super-grande-angulares; baseia-se no princípio de projeção mecânica, no qual os raios luminosos são materializados por hastes metálicas; é um instrumento utilizado extensivamente em trabalhos de aerotriangulação analógica de faixas ou bloco de fotografias. É considerado um instrumento de 1<sup>a</sup> ordem (fator C=1100); como outros aparelhos de 1<sup>a</sup> ordem, possui a capacidade de formar sucessivamente os modelos estereoscópicos, pelo processo de orientação progressiva, apesar de possuir apenas dois projetores, já que dispõe de prisma inversor (prisma de Dove) e capacidade de inversão de base (base interna x base externa). Assim, os sucessivos modelos são formados sempre referidos ao

<sup>4</sup> O menor intervalo entre curvas de nível que podem ser traçadas em um equipamento restituidor depende de uma constante do equipamento denominada "fator C" (ou fator de contorno); o "fator C" é definido pela relação:

$$C = \frac{H'}{\Delta h}$$

onde: H'=altura de vôo;

$\Delta h$ =menor desnível que o instrumento pode detectar;

H' e  $\Delta h$  são expressos na mesma unidade.

O progresso da Aerofotogrametria e a utilização de lentes cujo poder de resolução permite ampliar a imagem fotográfica tem conduzido ao abandono do conceito "fator C". No entanto, neste contexto, como elemento que permite comparação entre equipamentos restituidores analógicos, tal conceito permanece sendo útil.

sistema de coordenadas do primeiro modelo. O autógrafo WILD A9 permite percorrer a projeção do diapositivo em X e Y por meio de dois volantes, enquanto o movimento em Z é introduzido por um disco de pedal; acoplado ao instrumento existe um coordenatógrafo, no qual é realizada a restituição fotogramétrica; os movimentos X e Y são transmitidos mecanicamente a um lápis, no coordenatógrafo. Mediante mudança de relação de engrenagens é possível alterar a escala da folha de restituição em relação à escala do modelo. As coordenadas instrumentais X e Y dos pontos do modelo estereoscópico podem ser lidas em escalas graduadas em milímetros<sup>5</sup>, enquanto a coordenada Z pode ser lida em metros (ou pés) de uma escala graduada. Existem ainda escalas graduadas para indicar os movimentos em rotação e translação de cada projetor.

O aviográfico WILD B8 é um instrumento de 2<sup>a</sup> ordem (fator C=900) que adota o mesmo princípio de projeção mecânica usado no A9; suas duas câmaras de restituição possuem todos os movimentos (translações e rotações) necessários à orientação dos fotogramas<sup>6</sup>. O diapositivo empregado é de tamanho 23 x 23cm<sup>7</sup>, não exigindo redução; a imagem estereoscópica é vista pelo operador através de um binóculo com ampliação de seis vezes; o aumento da escala do modelo, em relação à escala da fotografia original, é de 1,6 a 2,4 vezes; as marcas-índices, destinadas a permitir medições e a restituição, são pequenos pontos pretos com um diâmetro de 0,07mm. O modelo estereoscópico é percorrido em X e Y deslocando-se normalmente a mesa traçadora; um pantógrafo transmite os movimentos da mesa traçadora para uma mesa de desenho.

Os aparelhos de 2<sup>a</sup> ordem - o que inclui o WILD B8 - são basicamente restituidores: não possuindo capacidade de inversão de base, não são capazes de realizar orientação progressiva.

<sup>5</sup> *Elimina-se, assim, a necessidade da plotagem gráfica (e também os erros daí decorrentes) usada nos instrumentos tipo Multiplex.*

<sup>6</sup> *A rotação  $\phi$  é comum aos dois projetores.*

<sup>7</sup> *O diapositivo utilizado no WILD A-9 é reduzido, de tamanho 11,5 x 11,5cm.*

Pelo descrito desses instrumentos - que denominamos "convencionais" - percebe-se que o WILD A9 é um equipamento tipicamente projetado para realizar aerotriangulação analógica<sup>8</sup>, podendo ser utilizado também para aerotriangulação semi-analítica, quando então a concatenação entre os modelos estereoscópicos sucessivos, antes realizada pelo instrumento fotogramétrico, passa a ser realizada numericamente. O WILD B8, mesmo quando equipado com sistema de medição<sup>9</sup>, não pode realizar aerotriangulação analógica: a ausência da capacidade de inversão de base torna impossível a orientação progressiva dos modelos estereoscópicos: cada modelo só pode ser formado independentemente, com seu próprio sistema de coordenadas; assim, a concatenação entre os modelos não pode ser realizada no instrumento e a alternativa para utilizar esse aparelho em aerotriangulação é o método semi-analítico (ou dos modelos independentes). Na verdade - e é esta a grande vantagem da aerotriangulação semi-analítica - qualquer estereoplotador pode ser empregado, desde que seja possível a leitura de coordenadas. No entanto, a opção aqui realizada é pela aerotriangulação analítica, por permitir compor o projeto com a desejada modularidade, entendida aqui como independência do equipamento e possibilidade de modificação de módulos individuais sem necessidade de alterar todo o sistema.

A aerotriangulação analítica não necessita das coordenadas dos pontos do modelo estereoscópico; necessita, sim, das coordenadas dos pontos imageados em fotografias individuais, já que a ligação entre essas fotografias será realizada por modelos matemáticos que relacionam as fotocoordenadas (coordenadas medidas nas fotografias) com as coordenadas dos pontos correspondentes do terreno. Na obtenção das fotocoordenadas normalmente são empregados comparadores (mono ou estereocomparadores), que são aparelhos de alta resolução; a vantagem do estereocomparador é a identificação estereoscópica do ponto-imagem, o que não é possível no monocomparador. Esses instrumentos dispõem de:

<sup>8</sup> *O ajustamento das faixas e do bloco pode ser levado a efeito gráfica ou numericamente.*

<sup>9</sup> *O projeto inicial, que destinou o aparelho especificamente para restituição, aparentemente não previu registrador de coordenadas; é possível, no entanto, dotar os B8 com a capacidade de medir coordenadas, equipando-os com um sistema de medição fornecido pela Casa Wild.*

- a) um sistema ótico, destinado a apresentar a foto ao operador e permitir a coincidência da marca-índice com a imagem do ponto que participará da aerotriangulação;
- b) um sistema de medida de fotocoordenadas;
- c) um sistema de leitura e registro de coordenadas, o qual poderá ou não ser automático.

Quando se utiliza um monocomparador para obtenção das coordenadas de foto (X, Y), os pontos-imagem a serem medidos deverão sofrer uma marcação permanente<sup>10</sup>, visando prevenir identificação equivocada na operação de medição das fotocoordenadas; a rotina de operação deve, além desse cuidado, prever a realização de algumas séries de leituras, com a finalidade de permitir a detecção de erros grosseiros e a adoção do valor médio das leituras. Quando se utiliza um estereocomparador, é possível medir simultaneamente as fotocoordenadas dos pontos-imagem correspondentes em um par estereoscópico; assim, o problema da identificação equivocada de pontos-imagem correspondentes em duas fotos consecutivas desaparece, devido a possibilidade de identificação estereoscópica.

No presente trabalho usar-se-á um equipamento aerotriangulador - o autógrafo WILD A9 - para obtenção das fotocoordenadas dos pontos que participarão da aerotriangulação analítica; na verdade, qualquer aerotriangulador de precisão poderia ser utilizado para esse fim. A rotina de operação específica para o WILD A9 pode ser adaptada sem maior dificuldade a outro aerotriangulador.

A precisão de um comparador varia tipicamente de um a dez micrômetros; a precisão que é possível esperar do equipamento aqui adotado é algo menor; no A9 realizam-se leituras diretamente até o centésimo de milímetro (dez micrômetros), sendo possível estimar, sem dificuldade, cinco micrômetros; o desvio padrão apresentado em uma série de leituras, realizadas com fim de teste, foi de dezessete micrômetros.

<sup>10</sup> Para tal será utilizado um transferidor de pontos. Esse equipamento não efetua medidas sobre as fotografias; em lugar disso, permite um exame estereoscópico da área de superposição de duas fotografias consecutivas de uma faixa e fornece meios de identificar e marcar fisicamente o ponto-imagem desejado.

Modernamente, vão sendo colocados no mercado aparelhos de crescente sofisticação, automatizando mais e mais cada operação, eliminando mão-de-obra, reduzindo tempo de resposta e aumentando a exatidão dos resultados. O preço a pagar é o elevado investimento em capital necessário para ter e manter um tal sistema, a incerteza da manutenção, a inexistência de alternativas para a hipótese de avarias e o afastamento cada vez maior, por parte dos usuários, dos conceitos envolvidos no processamento, limitando-se, estes, a aceitarem os resultados gerados pela "caixa-preta".

### 1.3 - SISTEMAS DE COORDENADAS

#### 1.3.1 - Apresentação do problema

A determinação das coordenadas de pontos do terreno - espaço objeto - a partir de pontos imageados em fotografias aéreas - espaço imagem - torna necessário estabelecer sistemas de coordenadas em relação aos quais seja possível definir os pontos que participam da aerotriangulação. A seguir são apresentados os sistemas de coordenadas envolvidas no problema da aerotriangulação, tal como aqui é abordado, em ambos os espaços, e as relações entre eles que poderão ser utilizados na implementação do processo.

#### 1.3.2 - Definição dos sistemas

##### a) Sistema de coordenadas fiduciais (figura 1.3.2.1)

- sistema cartesiano bidimensional para determinação de fotografocoordenadas;

- origem: centro fiducial (CF) da fotografia, definido pela interseção dos eixos fiduciais;

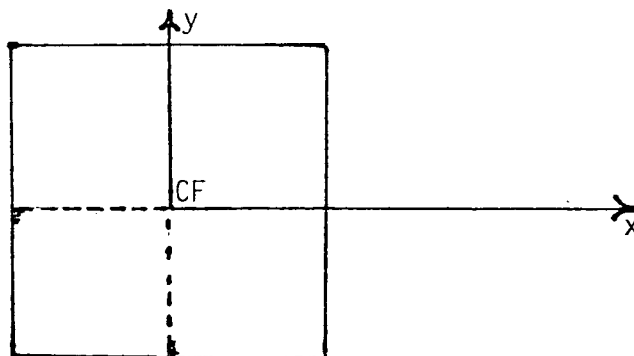


Fig. 1.3.2.1

- eixo x: definido pelo centro fiducial e por uma das marcas fiduciais, segundo a direção que mais se aproxima da linha de vôo;
- eixo y: perpendicular ao eixo x e à esquerda do sentido positivo deste; o sistema é dextrógiro, portanto.

b) Sistema de coordenadas fotográficas

- sistema cartesiano bidimensional<sup>1</sup> para determinação de fotocoordenadas (figura 1.3.2.2);
- origem: ponto principal (PP) da fotografia;
- eixo x: paralelo ao eixo x do sistema fiducial e positivo na direção do vôo;
- eixo y: perpendicular ao eixo x e à esquerda do sentido positivo deste.

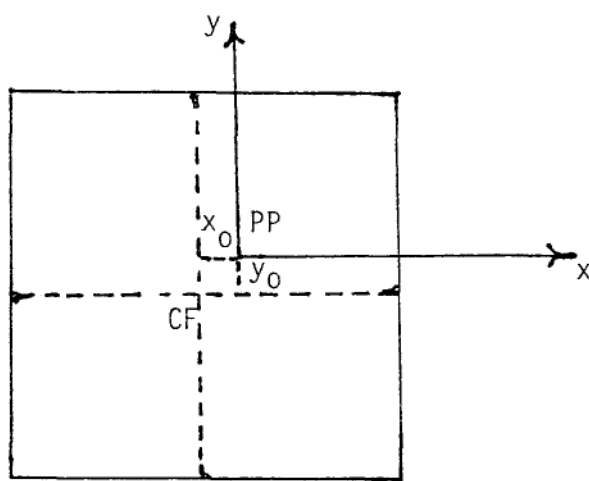
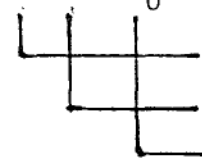


Fig. 1.3.2.2.

Assim, conhecendo-se as coordenadas do ponto principal no sistema fiducial<sup>2</sup>, uma simples translação permite passar do sistema fiducial para o sistema fotográfico, uma vez que os dois sistemas são paralelos:

<sup>1</sup> O sistema poderia ter sido definido como tridimensional - na realidade o é, e assim é definido, logo a seguir. Essa divisão do sistema de coordenadas fotográficas foi adotada para maior facilidade de exposição ao longo do trabalho.

<sup>2</sup>  $x_0$  e  $y_0$ , fornecidas no certificado de calibração da câmara.

$$x' = x - x_0 \quad (1.3.2.1)$$


abcissa no sistema fotográfico  
 abcissa no sistema fiducial  
 abcissa do ponto principal no sistema fiducial

Identicamente para a ordenada:

$$y' = y - y_0 \quad (1.3.2.2)$$

O sistema de coordenadas fotográficas pode ser definido como um sistema cartesiano tri-dimensional<sup>2A</sup> (Figura 1.3.2.3); nesse caso a origem do sistema estará situada no centro perspectivo (CP), os eixos x e y estarão definidos como anteriormente e o eixo z será coincidente com o eixo  tico e orientado de modo a que o sistema de coordenadas seja dextr giro.

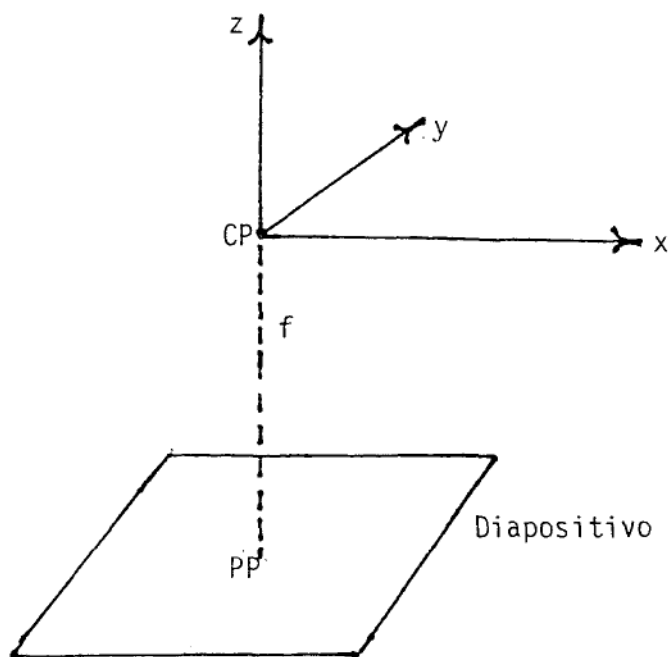


Figura 1.3.2.3

<sup>2A</sup> Nesse caso, pode ser chamado também de sistema fotogramétrico.



Associadas aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , do sistema de coordenadas fotográficas estão as rotações  $\omega$ ,  $\phi$  e  $\kappa$ , em torno de cada um desses eixos (Figura 1.3.2.4).

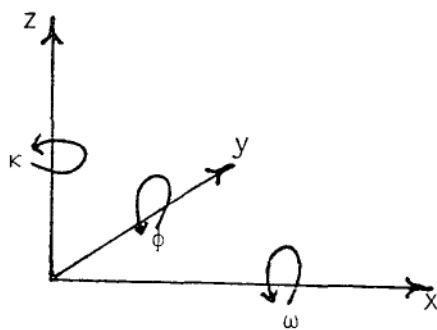


Figura 1.3.2.4

Em relação ao sistema de coordenadas fotográficas tridimensionais, a posição de um ponto genérico  $p$ , situado na fotografia, é definida pelo vetor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -f' \end{pmatrix}$  (1.3.2.3)

Na (1.3.2.3)  $f$  é a distância focal calibrada da câmara aérea empregada e  $x'$  e  $y'$  as coordenadas em relação ao ponto principal (vide Figura 1.3.2.5); se  $x$  e  $y$  forem as coordenadas fiduciais do ponto  $p$ , então  $\vec{r}$  pode ser escrito:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -f \end{pmatrix} \tag{1.3.2.4}$$

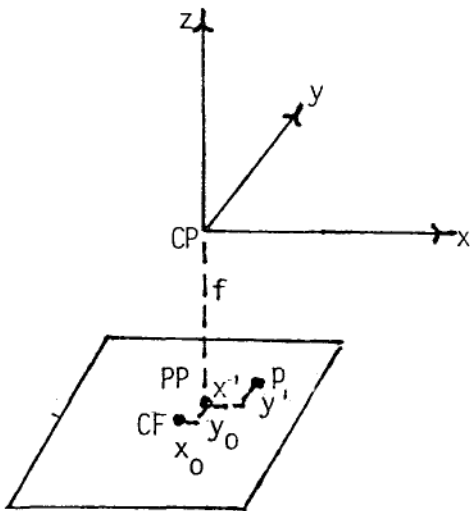


Figura 1.3.2.5

c) Sistema de coordenadas instrumentais

- sistema cartesiano bidimensional<sup>3</sup> para determinação de fotocoordenadas (Figura 1.3.2.6);
- origem: interseção dos eixos do instrumento fotogramétrico, colocado em uma posição arbitrária.

Os eixos X e Y são ortogonais<sup>4</sup> e compõem um sistema dextrôgiro; quando isto não ocorrer, antes de iniciar as computações, deve-se aplicar analiticamente as reflexões (inversão no sentido do eixo) necessárias a fazer com que o eixo X se desenvolva em uma direção próxima à da linha de vôo e a tornar o sistema dextrôgiro.

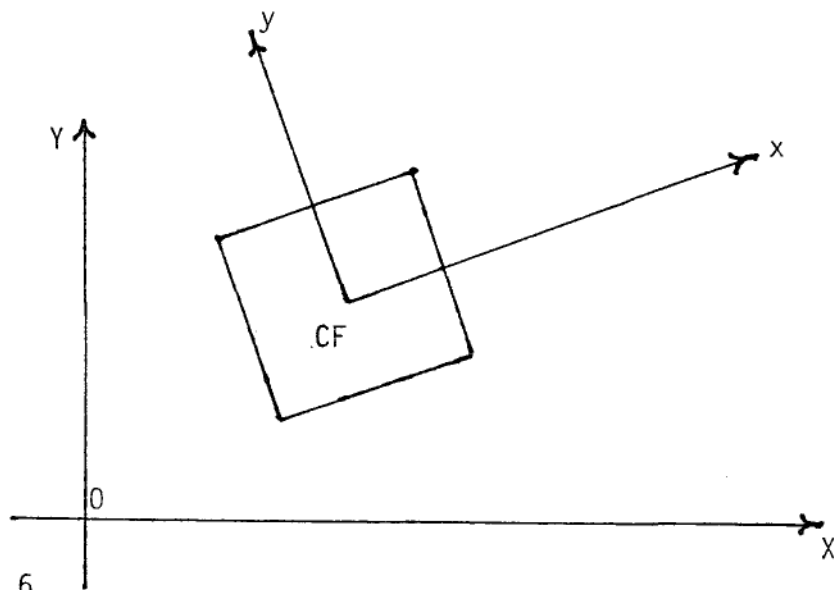


Figura 1.3.2.6

Observe-se que o sistema de coordenadas instrumentais, com o qual efetivamente serão realizadas medidas sobre a fotografia destinada à aerotriangulação analítica, normalmente se refere a um comparador. No caso presente, no entanto, pretende-se utilizar um equipamento analógico convencional, dotado de registrador de coordenadas, para efetuar me

<sup>3</sup> Veja-se observação (1) de pé de página, neste item. Aqui, no entanto, não se expandirá o sistema instrumental para o espaço a três dimensões. A razão se tornará clara ao longo do trabalho: é possível adiantar no momento que, ao realizar medidas sobre uma fotografia usando equipamento fotogramétrico convencional, destinado a efetuar medidas sobre um modelo estereoscópico, optou-se por abrir mão da estereoscopia. O equipamento, então, estará sendo usado como um monocomparador.

<sup>4</sup> Naturalmente, a ortogonalidade perfeita materializada em um equipamento corresponde à situação ideal e, pelo menos no momento, não se encontra disponível. Existe, entretanto, meio matemático de tratar o problema.

dições sobre a fotografia. Assim, devem ser tomadas algumas providências que seriam desnecessárias se estivesse sendo empregado um comparador. Para o caso específico do autógrafo WILD A-9 a rotina de operação para a obtenção de fotocoordenadas, basicamente, utiliza apenas um dos projetores<sup>5</sup>, o plano XY é nivelado, o eixo X é tornado paralelo ao correspondente eixo fiducial e a marca Índice do sistema ótico é deslocada para o canto inferior esquerdo da projeção do diapositivo; esta última providência destina-se a evitar o surgimento de coordenadas negativas, as quais facilmente induzem ao erro de leitura, no caso do WILD A-9. A situação está esquematizada na figura 1.3.2.7. Observe-se também, que a manutenção da origem na mesma situação durante todo o processo de leitura, facilita a detecção de erros grosseiros.

Outros equipamentos aerotrianguladores podem ser empregados para a obtenção de fotocoordenadas; deve-se ter em mente a necessidade de coerência entre a precisão exigida pelo trabalho, a precisão que pode ser fornecida pelo instrumento e o nível de precisão envolvido nas diversas fases do método. No caso do WILD A-9 pode-se efetuar leituras de coordenadas X e Y diretamente até 0,01mm e estimar a metade desse valor [03]. Em uma série de 132 leituras realizadas como teste obteve-se um desvio padrão de 0,017mm (17 micrômetros), valor esse adotado no presente trabalho como primeira aproximação do desvio padrão.

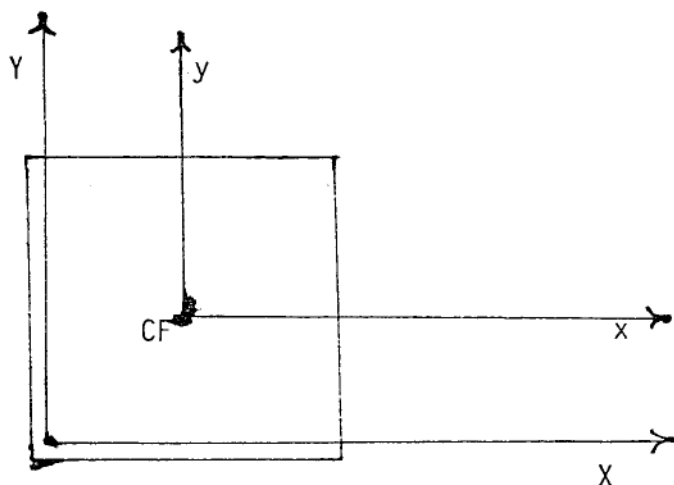


Figura 1.3.2.7

<sup>5</sup> Preferencialmente o mesmo projetor, visando evitar variação de parâmetros durante a aerotriangulação.

A transformação das coordenadas instrumentais para coordenadas fiduciais e destas para coordenadas fotográficas é abordada no item 3.2.1 deste trabalho.

d) Sistema de coordenadas do modelo

Trata-se de um sistema de coordenadas destinado a permitir medições sobre modelos estereoscópicos, situando-se no espaço a três dimensões, em consequência. O sistema descrito a seguir (Figura 1.3.2.8) é o recomendado pela Sociedade Internacional de Fotogrametria:

- Terno cartesiano ortogonal;
- origem: centro perspectivo da fotografia da esquerda;
- eixo X: paralelo ao eixo fiducial correspondente e positivo na direção de voo (ou na direção da base da câmara);
- eixo Z: coincidente com o eixo ótico da câmara;
- eixo Y: de modo a tornar o sistema dextrógiro.

Eventualmente as coordenadas poderão ser definidas como X, Y e H (altura).

Os componentes da base,  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$ , coincidem com as direções dos eixos X, Y e Z, respectivamente; as rotações  $\Omega$ ,  $\Phi$ , e  $\kappa$  se fazem em torno dos eixos X, Y e Z [04]. Observe-se que o segundo centro perspectivo não se situa necessariamente sobre o eixo X.

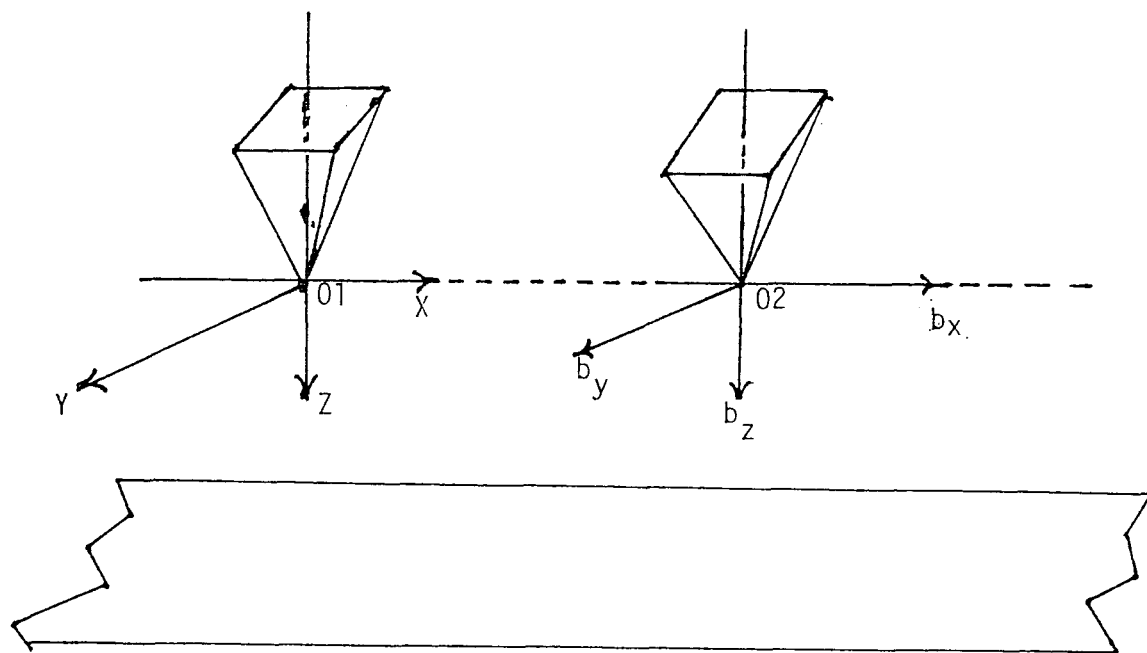


Figura 1.3.2.8

#### e) Sistema de coordenadas geodésicas elipsóidicas

É um sistema destinado a localizar pontos no terreno, calcado em um elipsóide de referência e tendo por coordenadas a latitude geodésica (ou elipsóidica)  $\phi$ , a longitude geodésica (ou elipsóidica)  $\lambda$  e a altitude geométrica  $H$ . A figura 1.3.2.9 ilustra o sistema. O ângulo que a normal ao elipsóide baixada do ponto genérico  $P$  forma com sua projeção equatorial é a latitude geodésica; o ângulo diedro formado pelos meridianos geodésicos de Greenwich ( $G_w$ -origem) e do ponto  $P$  mede a longitude geodésica de  $P$ ; a altitude geométrica é a distância de  $P$  ao elipsóide contada sobre a respectiva normal [05].

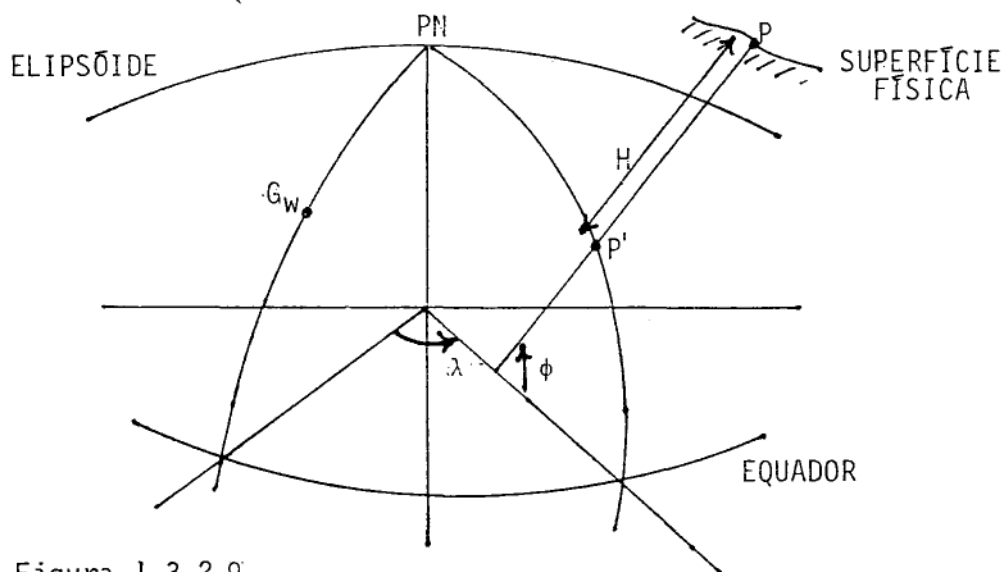


Figura 1.3.2.9

#### f) Sistema de coordenadas cartesianas geodésicas

Tem-se, nesse caso, um terno cartesiano ortogonal com origem no centro do elipsóide tomado como referência. Os eixos são dispostos como se segue (Figura 1.3.2.10):

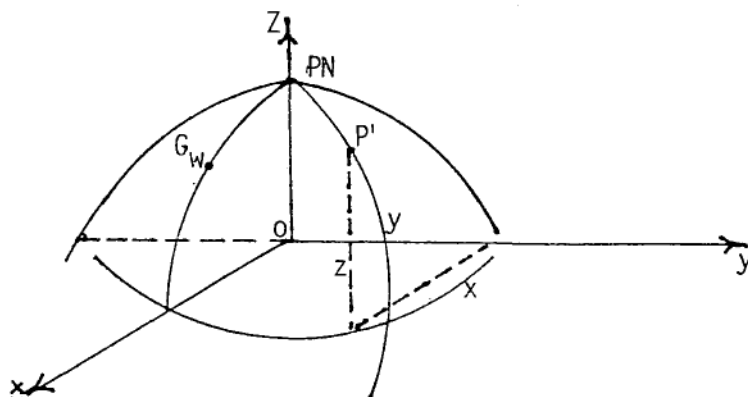


Figura 1.3.2.10

eixo X: orientado para o ponto de interseção do Equador com o meridiano de Greenwich;

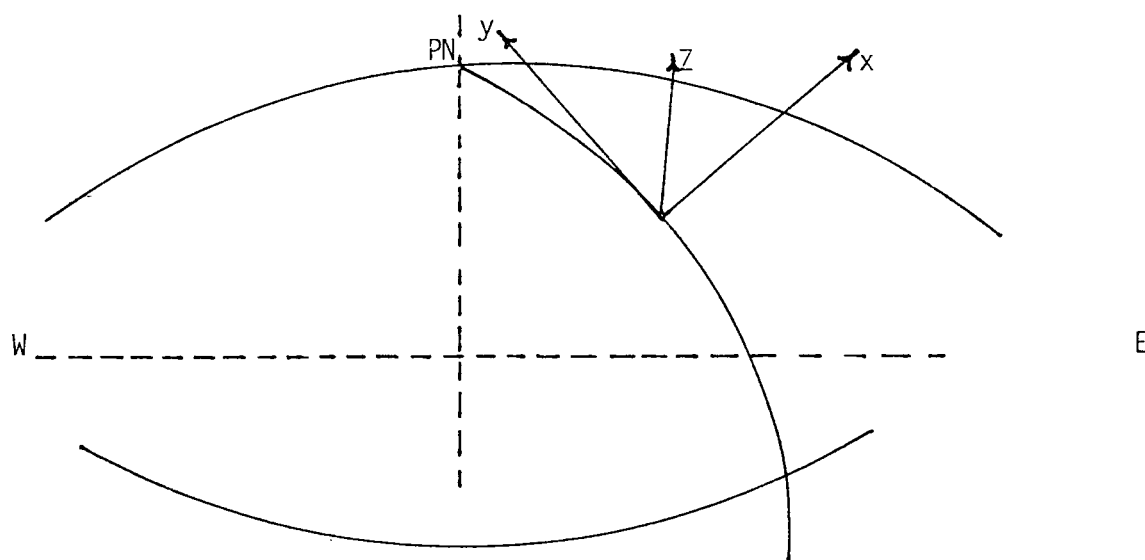
eixo Z: orientado para o polo norte;

eixo Y: orientado de tal forma que o sistema seja dextrógiro.

Quando usado em Fotogrametria esse sistema será considerado como um sistema médio (isto é, referido ao polo norte médio), com a finalidade de não permitir que suas coordenadas variem com o tempo, como ocorre com os sistemas geodésicos instantâneos, referidos ao polo norte instantâneo.

#### g) Sistema de coordenadas geodésicas locais

No modelo matemático da aerotriangulação analítica - tal como obtido no capítulo dois - as coordenadas dos pontos do terreno estão expressas em coordenadas geodésicas locais; tal tratamento permite a redução do número de dígitos necessários à definição das coordenadas, podendo vir a economizar memória nas computações, enquanto retém a vantagem de não necessitar considerar a questão da curvatura da Terra. O sistema local é definido abaixo (Figura 1.3.2.1):



- Figura 1.3.2.1

- origem: no ponto de interseção da normal ao elipsóide em P com o elipsóide (ou em suas proximidades), sendo P o ponto de interesse; arbitrariamente escolhido;

- eixo Y: tangente ao meridiano na origem e orientado para o norte;
- eixo X: a  $90^0$  do eixo Y, para leste;
- eixo Z: normal ao elipsóide, na origem, e orientado de tal forma que o terno cartesiano seja dextrógiro<sup>2a</sup>.

### 1.3.3 - Transformações de coordenadas

As coordenadas dos pontos de apoio à aerotriangulação normalmente são expressas no sistema geodésico elipsoidal<sup>1</sup>; como o modelo matemático de aerotriangulação analítica<sup>2</sup> usa os pontos de apoio expressos em um sistema geodésico local, haverá necessidade de passar de um sistema de coordenadas para o outro, o que é feito via coordenadas cartesianas geodésicas; ao final da aerotriangulação o caminho inverso é percorrido, já que se obtém os pontos aerotriangulados expressos em um sistema geodésico local e se deseja as coordenadas geodésicas elipsóidicas desses pontos. Quanto às fotocoordenadas, a passagem do sistema instrumental para o sistema fotográfico será tratada no capítulo relativo a erros sistemáticos, de vez que essa transformação modelará a deformação do papel fotográfico e a falta de ortogonalidade entre os eixos do instrumento empregado para leitura das fotocoordenadas.

<sup>1</sup> Caso não o sejam, sempre será possível assim expressá-las.

<sup>2</sup> Equações de colinearidade, obtidas no capítulo dois.

<sup>2a</sup> Eventualmente poderá ser definido como levógiro.

a) Transformação do sistema geodésico elipsoidal para o cartesiano

geodésico

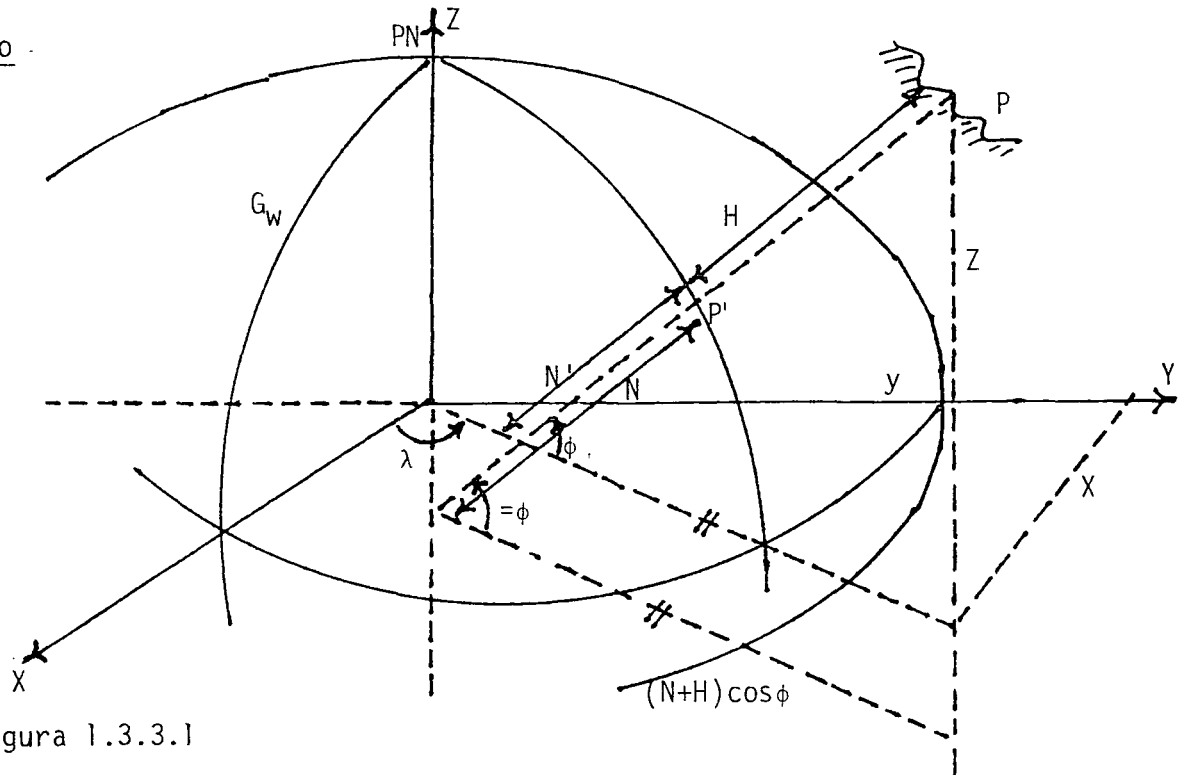


Figura 1.3.3.1

Da Figura 1.3.3.1 obtém-se as expressões:

$$X = (N + H) \cos \phi \operatorname{sen} \lambda$$

$$Y = (N + H) \cos \phi \operatorname{sen} \lambda$$

$$Z = (N' + H) \operatorname{sen} \phi = [N (1 - e^2) + H] \operatorname{sen} \phi$$

Sendo:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi)^{1/2}} e$$

$$N' = N(1 - e^2)$$

Onde:

N = grande normal;

N' = pequena normal;

a = semi-eixo maior do elipsóide adotado;

e = excentricidade do elipsóide adotado;

( $\phi, \lambda, H$ ) = coordenadas geodésicas elipsóidicas do ponto genérico P;

(X, Y, Z) = coordenadas cartesianas geodésicas relativas ao mesmo ponto.



b) Transformação do sistema cartesiano geodésico para geodésico local

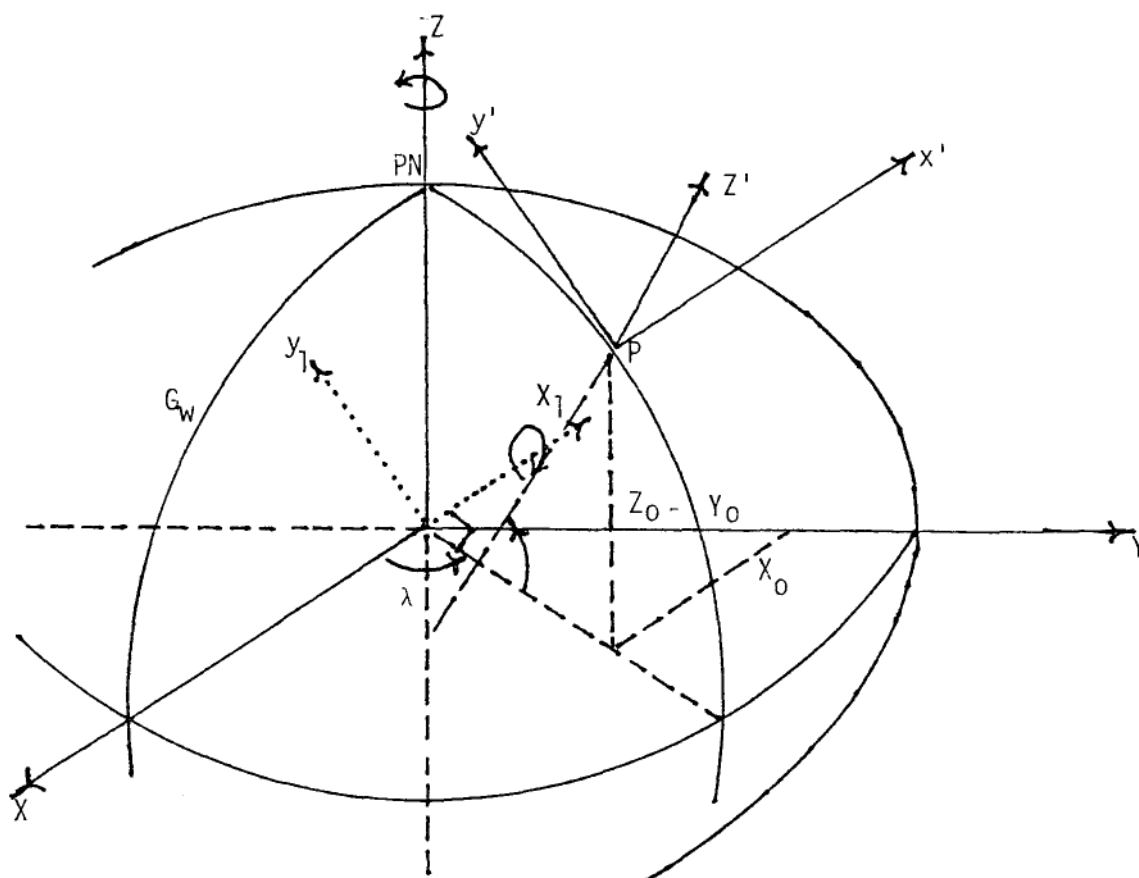


Figura 1.3.3.2

As coordenadas locais são obtidas a partir das cartesia nas geodésicas por uma transformação tri-dimensional, a qual consta de uma translação e duas rotações. Um ponto P sobre a superfície do elipsóide (ou proximidades) é escolhido arbitrariamente<sup>3</sup> como origem do sistema geodésico local; suas coordenadas cartesianas geodésicas são  $(X_0, Y_0, Z_0)$  - veja-se a figura 1.3.3.2 - e suas coordenadas elipsoidais são  $(\phi, \lambda)$ .

<sup>3</sup> Para fins de cartografia Náutica, quando a extensão das faixas normalmente é pequena, não existe qualquer inconveniente em arbitrar como o origem um ponto de apoio no início da faixa. Na hipótese de faixas longas pode-se escolher como origem um ponto a meio da faixa, visando manter pequeno o número de dígitos necessários para expressar as coordenadas. Em qualquer caso, tenta-se permanecer nos limites da precisão simples, procurando evitar ocupação extensiva de memória de computador.

Para que ocorra a coincidência entre os dois referenciais deverá ser efetuada uma rotação em torno do eixo Z do ângulo  $(90^0 + \lambda)$  e uma rotação em torno do eixo X do ângulo  $(90^0 - \phi)$ , além de uma translação. Em linguagem matricial:

$$(1.3.3.2) \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = R_1 (90^0 - \phi) R_3 (90^0 + \lambda) \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Sendo:

$(X', Y', Z')$  = coordenadas geodésicas locais do ponto considerado;

$(X, Y, Z)$  = coordenadas cartesianas geodésicas do ponto considerado;

$(X_0, Y_0, Z_0)$  = coordenadas cartesianas geodésicas do ponto arbitrado como origem para o sistema local;

$(\phi, \lambda)$  = coordenadas elipsoidais do ponto arbitrado como origem para o sistema local.

O desenvolvimento da (1.3.3.2) permitirá chegar às expressões que efetuam a transformação de coordenadas em estudo:

$$(1.3.3.3) \quad \begin{aligned} X' &= -\sin \lambda (X - X_0) + \cos \lambda (Y - Y_0) \\ Y' &= -\sin \phi \cos \lambda (X - X_0) - \sin \phi \sin \lambda (Y - Y_0) + \cos \phi (Z - Z_0) \\ Z' &= \cos \phi \cos \lambda (X - X_0) + \cos \phi \sin \lambda (Y - Y_0) + \sin \phi (Z - Z_0) \end{aligned}$$

c) Transformação do sistema geodésico local para o cartesiano geodésico

A expressão (1.3.3.2), abaixo transcrita, permite passar de coordenadas geodésicas para coordenadas locais:

$$(1.3.3.2) \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = R_1 (90^0 - \phi) R_3 (90^0 + \lambda) \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Escrevendo a mesma expressão de maneira mais concisa...

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

sendo  $R = R_1 (90^\circ - \phi) R_3 (90^\circ + \lambda)$  a matriz de transformação relativa à mudança de coordenadas em jogo. Prē-multiplicando ambos os membros da expressão por  $R^{-1}$  (inversa de  $R$ ) e trocando suas posições, vem:

$$\begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} \quad \therefore$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

Como as matrizes de rotação são sempre ortogonais [06], segue-se que sua inversa é igual à transposta:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

O desenvolvimento da expressão matricial acima virá fornecer as relações que permitirão passar do sistema local para o sistema geodésico; o significado das variáveis é o mesmo visto anteriormente.

$$X = -X' \sin \lambda - Y' \sin \phi \cos \lambda + Z' \cos \phi \cos \lambda + X_0$$

$$Y = X' \cos \lambda - Y' \sin \phi \sin \lambda + Z' \cos \phi \sin \lambda + Y_0 \quad (1.3.3.4)$$

$$Z = Y' \cos \lambda + Z' \sin \phi + Z_0$$

#### d) Transformação do sistema cartesiano geodésico para geodésico e- lipsoidal

A passagem do sistema geodésico elipsoidal para o cartesiano geodésico se faz por meio das expressões (1.3.3.1), abaixo trans

critas:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= (N + H) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin \phi \end{aligned} \quad (1.3.3.1)$$

Dividindo a segunda pela primeira das expressões...

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{Y}{X} \quad \therefore \quad \lambda = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y}{X} \quad (4)$$

Elevando ao quadrado as duas primeiras expressões e somando-as...

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (N + H)^2 \cos^2 \phi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \therefore \\ (N + H) \cos \phi &= (X^2 + Y^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3.3.5)$$

Desenvolvendo a terceira das (1.3.3.1) e colocando-a em forma adequada...

$$(N + H) \sin \phi = Z + N e^2 \sin \phi \quad (1.3.3.6)$$

Dividindo a (1.3.3.6) pela (1.3.3.5), vem:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{Z + N e^2 \sin \phi}{(X^2 + Y^2)^{1/2}} \quad \therefore \quad \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Z + N e^2 \sin \phi}{(X^2 + Y^2)^{1/2}}$$

A expressão acima terá de ser resolvida iterativamente, uma vez que a incôgnita está, também, presente no segundo membro<sup>5</sup>. Uma vez obtidos  $\phi$  e  $\lambda$ , pode-se obter H a partir da primeira ou segunda das (1.3.3.1); por exemplo:

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos \phi \cos \lambda \therefore \\ N + H &= \frac{X}{\cos \phi \cos \lambda} \therefore H = X \sec \phi \sec \lambda - N \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Para  $\lambda$  nas proximidades de  $90^\circ$ , usa-se a expressão:  $\lambda = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{Y}{(X^2 + Y^2)^{1/2}}$

<sup>5</sup> Para a primeira iteração pode-se usar  $N=a$  e  $\phi=0^\circ$ . A convergência ocorre com pequeno número de iterações; empregando-se o método de iteração de Newton-Raphson.

As expressões (1.3.3.7), portanto, permitem passar do sistema cartesiano geodésico para o sistema geodésico elipsoidal.

$$\phi = \arctg \frac{Z + Ne^2 \sin \phi}{(X^2 + Y^2)^{1/2}}$$

$$\lambda = \arctg \frac{Y}{X} \quad (1.3.3.7)$$

$$H = X \sec \phi \sec \lambda - N$$

#### 1.4 - TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

##### 1.4.1 - Apresentação do Problema

As transformações geométricas permitem que se faça a migração de objetos de um espaço para outro espaço. Seja a Figura 1.4.1: a transposição do quadrado representado no espaço 2 para o espaço 1 envolve, no mínimo, uma translação: pode requerer um número maior; pode envolver uma ou mais rotações, em torno de eixos convencionados; a forma e/ou as dimensões da figura podem se manter ou não, após a transformação.

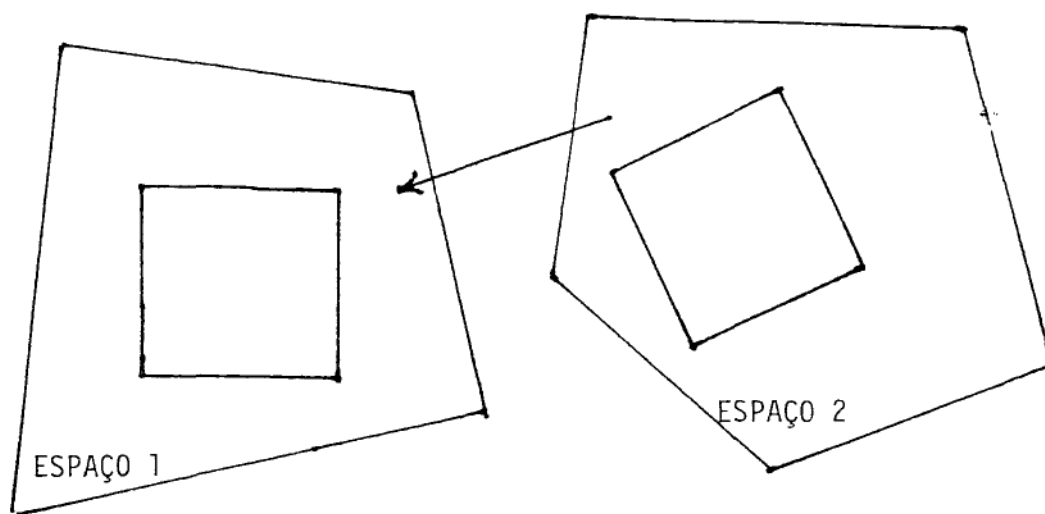


Figura 1.4.1

Por meio das transformações geométricas será possível estabelecer as relações entre sistemas de coordenadas, com a finalidade de transferir pontos de um sistema para outro. Convém observar que [03]:

a) o estudo geométrico de um objeto em dois espaços requer um conjunto de pontos (pontos de controle) cujas coordenadas estão disponíveis nos dois espaços;

b) um certo número de pontos relativos a um objeto pode gerar informações insuficientes, suficientes ou superabundantes para a definição da geometria do objeto estudado;

c) diferentes modelos matemáticos serão necessários para definir geometricamente um certo objeto, em diferentes circunstâncias.

#### 1.4.2 - Transformações ortogonais

São transformações em que a forma e dimensões do objeto são mantidas, após a transformação; essas transformações, portanto, implicam apenas em translações, rotações e/ou reflexões de eixos (inversão no sentido de orientação de um eixo). São, por vezes, chamadas de transformações de corpo rígido [09], já que se trata de um tipo de transformação linear em que não ocorre variação na forma ou na escala do objeto transformado. Essa transformação, como resultado, é incapaz de modelar distorções.

Genericamente, a transformação ortogonal envolve rotações e translações; seu modelo matemático será escrito:

$$\bar{X} = R\bar{x} \quad (1.4.2.1)$$

sendo:  $\bar{X} = X - X_0$

$R$  = matriz de rotação

$\bar{x} = x - x_0$

Considerando a Figura 1.4.2.1 - no plano - tem-se:

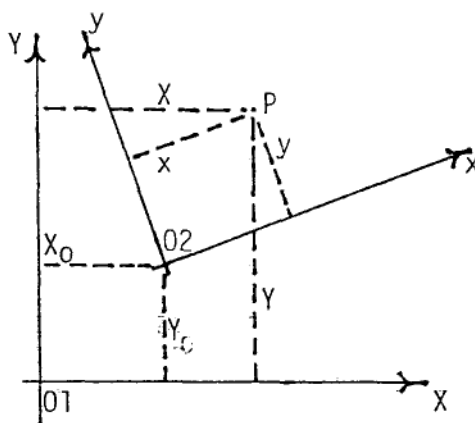


Figura 1.4.2.1

$(X, Y)$  = coordenadas do ponto P no espaço 1;  
 $(x, y)$  = coordenadas do ponto P no espaço 2;  
 $(X_0, Y_0)$  = coordenadas da origem do espaço 2, referidas à origem do espaço 1;

$k$  = ângulo entre os sistemas de eixos dos dois espaços.

À vista da (1.4.2.1) é possível escrever:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (1.4.2.2)$$

ou

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (1.4.2.3)$$

Fazendo  $\cos k = a$ ,

$\sin k = b$

e chamando de  $\underline{c}$  e  $\underline{d}$  as translações realizadas, ao longo dos eixos  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ , respectivamente<sup>1</sup>, vem:

$$X = ax + by + c \quad (1.4.2.4)$$

$$Y = -bx + ay + d$$

A transformação ortogonal, no plano, envolve, portanto, 3 (três) parâmetros: dois deles relacionados com a translação ( $c$  e  $d$ ) e o terceiro ( $k$ ) relativo a rotação; note-se que  $a^2 + b^2 = 1$ .

Convém observar que, como particularização do caso geral acima, uma transformação ortogonal pode vir a ser definida apenas por uma translação ou uma rotação ou mesmo uma reflexão.

<sup>1</sup> Na verdade,  $\underline{c}$  e  $\underline{d}$ , translações segundo os eixos  $x$  e  $y$ , são componentes segundo esses eixos da única translação realizada.

No caso de uma translação (no espaço a 3 dimensões, por exemplo), a transformação ortogonal será escrita:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (1.4.2.5)$$

Para o caso de uma rotação em torno do eixo  $x^2$ :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.4.2.6)$$

A transformação ortogonal  $\bar{\phantom{x}}$  relativa a uma reflexão efetuada no eixo  $y$  seria escrita:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.4.2.7)$$

#### 1.4.3 - Transformações de similaridade

São transformações geométricas que apresentam as seguintes características:

- a) a forma do objeto transformado é mantida;
- b) as dimensões do objeto transformado variam.

Como resultado de a e b conclui-se que a transformação de similaridade admite um (e apenas um) fator de escala; seu modelo matemático será:

$$\bar{X} = \kappa R \bar{x} \quad (1.4.3.1)$$

em que:  $\bar{X} = X - X_0$

$\kappa$  = fator de escala

$R$  = matriz de rotação

$\bar{x} = x - x_0$

<sup>2</sup> Está sendo obedecida a convenção que estabelece que os ângulos  $\omega$ ,  $\phi$  e  $\kappa$  se referem a rotações efetuadas em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.



Desenvolvendo a (1.4.3.1) sob forma matricial, no plano:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} \cos k & \sin k \\ -\sin k & \cos k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (1.4.3.2)$$

Fazendo

$$\kappa \cos k = a$$

$$\kappa \sin k = b$$

e admitindo que as translações são representadas por  $\underline{c}$  e  $\underline{d}$ <sup>3</sup>, vem:

$$X = ax + by + c \quad (1.4.3.3)$$

$$Y = -bx + ay + d$$

A transformação de similaridade no plano é definida por quatro parâmetros (uma rotação, duas translações e um fator de escala).

Para o espaço a três dimensões, considere-se a Figura 1.4.

3.1:

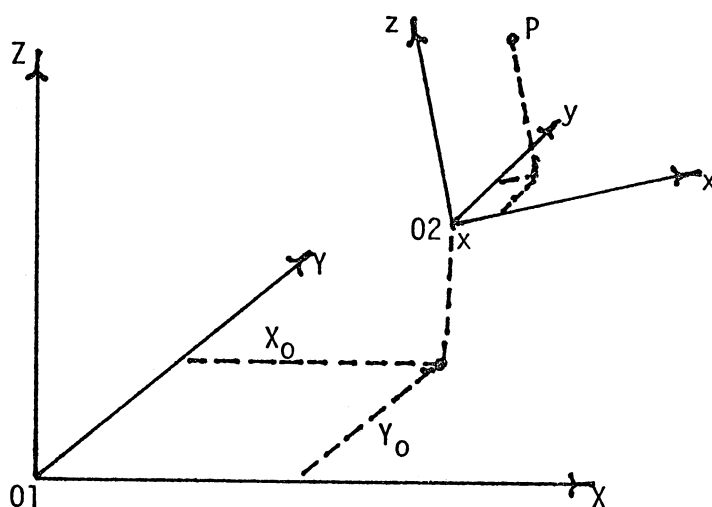


Figura 1.4.3.1

$(X, Y, Z)$  = coordenadas do ponto P no espaço 1;

$(X_0, Y_0, Z_0)$  = coordenadas da origem do espaço 2 referidas ao espaço 1;

$(x, y, z)$  = coordenadas do ponto P no espaço 2;

$R$  = matriz de rotação;

<sup>3</sup> Vide observação 1.

Observe-se que  $(x_0, y_0, z_0)$  surge quando a origem do sistema de eixos xyz não coincide com a origem do espaço 2, existindo portanto necessidade de realizar uma translação, para que essa coincidência ocorra; esse vetor de translações é incluído nos modelos matemáticos para tornar geral seu alcance. Assim, no espaço a três dimensões, a transformação de similaridade pode ser escrita:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \kappa R \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (1.4.3.4)$$

A expressão (1.4.3.4) permite perceber que, no espaço a três dimensões, a transformação de similaridade é definida por sete parâmetros, dos quais três se referem a rotações, três a translações e o sétimo corresponde ao fator de escala.

Observe-se que a matriz de rotação R, em um consenso geral, deve ser entendida como o produto das matrizes de rotação  $R_\omega$ ,  $R_\phi$  e  $R_k$ , sendo  $\omega$  a rotação primária (em torno do eixo dos x),  $\phi$  a rotação secundária (em torno do eixo dos y) e  $k$  a rotação terciária (em torno do eixo dos z). Assim:

$$R = R_\omega R_\phi R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos k & \cos\phi \sin k & -\sin\phi \\ \sin\omega \sin\phi \cos k - \cos\omega \sin k & \sin\omega \sin\phi \sin k + \cos\omega \cos k & \sin\omega \cos\phi \\ \cos\omega \sin\phi \cos k + \sin\omega \sin k & \cos\omega \sin\phi \sin k - \sin\omega \cos k & \cos\omega \cos\phi \end{pmatrix}$$

(1.4.3.5)

#### 1.4.4 - Transformações afim

São transformações geométricas que apresentam as seguintes características:

a) os paralelismos existentes, antes da transformação, são mantidos após a transformação;

b) existe mais de um fator de escala envolvido, variando as dimensões diferentemente segundo cada eixo; no entanto, ao longo de um determinado eixo, o fator de escala permanece constante;

c) em razão de b, a forma dos objetos não é mantida após a transformação.

O modelo matemático da transformação afim pode ser escrito (no plano):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (1.4.4.1)$$

ou

$$\begin{aligned} X &= a_1 + b_1x + c_1y \\ Y &= a_2 + b_2x + c_2y \end{aligned} \quad (1.4.4.2)$$

A forma bidimensional (no plano) da transformação afim é comumente usada para utilizar a transformação de coordenadas instrumentais de foto para coordenadas fiduciais, permitindo modelar (em parte) a deformação do filme [10], enquanto sua forma tridimensional é às vezes utilizada para efetuar a concatenação de modelos estereoscópicos e para realizar a transformação de coordenadas do modelo para coordenadas do terreno.

As expressões (1.4.4.2) constituem a forma geral da transformação afim no plano; essa transformação envolve seis parâmetros.

De forma similar, verifica-se que a transformação afim a três dimensões (no espaço) envolve 12 parâmetros e possui a seguinte forma geral:

$$\begin{aligned} X &= a_1 + b_1x + c_1y + d_1z \\ Y &= a_2 + b_2x + c_2y + d_2z \\ Z &= a_3 + b_3x + c_3y + d_3z \end{aligned} \quad (1.4.4.3)$$

ou

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

#### 1.4.5 - Transformações Projetivas

A característica básica das transformações projetivas é a manutenção da colinealidade: três pontos colineares permanecem em linha reta, após a transformação projetiva. A forma dos objetos não é mantida.

A expressão geral da transformação projetiva, no plano, envolve oito parâmetros [12]:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_1x + a_2y + a_3}{a_4x + a_5y + 1} \\y &= \frac{a_6x + a_7y + a_8}{a_4x + a_5y + 1}\end{aligned}\tag{1.4.5.1}$$

No espaço a três dimensões a transformação projetiva envolve quinze parâmetros [13]:

$$\begin{aligned}X &= \frac{a_1x + a_2y + a_3z + a_4}{a_5x + a_6y + a_7z + 1} \\Y &= \frac{a_8x + a_9y + a_{10}z + a_{11}}{a_5x + a_6y + a_7z + 1} \\Z &= \frac{a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z + a_{15}}{a_5x + a_6y + a_7z + 1}\end{aligned}\tag{1.4.5.2}$$

#### 1.4.6 - Transformações Polinomiais

As transformações polinomiais incluem deformações em todas as direções: em consequência, a forma dos objetos não é mantida, após a transformação. Um uso típico dessa transformação é a tentativa de modelar as deformações apresentadas por faixas de voo aerotrianguladas analogicamente (ou pelo método semi-analítico); nos polinômios abaixo assumiu-se que as deformações são de segundo grau; esses polinômios tentarão modelar as deformações, substituindo o ajustamento gráfico<sup>6</sup>.

$$\begin{aligned}X &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy \\Y &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy\end{aligned}\tag{1.4.6.1}$$

<sup>6</sup> As expressões (1.4.6.1) estão definidas em duas dimensões; está implícito, portanto, que tentam modelar apenas as distorções planimétricas. Expressões similares podem ser escritas para três dimensões, considerando mais uma coordenada.

A escolha arbitrária de polinômios para modelar distor  
ções pode acarretar inconvenientes [14]:

- possibilidade de correlação entre parâmetros;
- dificuldades em estabelecer a precisão quando usando polinômios de grau muito elevado.

## CAPÍTULO 2 - OBTENÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DA AEROTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA

2.1 - Apresentação do Problema

2.2 - Obtenção do modelo matemático da aerotriangulação analítica

## 2.1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Fotogrametria analítica significa avaliação numérica das imagens fotográficas. Ao contrário da aerotriangulação analógica, a qual reproduz a situação física, em escala, a aerotriangulação analítica deve\_rã modelar tal situação usando métodos matemáticos. Existe necessidade, portanto, de um modelo matemático capaz de descrever o fenômeno com aproximação suficiente; esse modelo matemático está calcado na condição de colinearidade: admite-se, em princípio, que a fotografia é uma perspectiva central perfeita e que o raio luminoso se propaga seguindo as leis da ótica geométrica. Assim, o ponto-objeto (no terreno), o centro perspectivo e o ponto-imagem (no plano do negativo) estarão em linha reta (vide Figura 2.1.1). Sabe-se que, na verdade, as hipóteses efetuadas constituem em uma simplificação da realidade: o centro perspectivo não é puntual, a luz não se propaga em linha reta, o plano do negativo não é plano e assim por diante. No entanto, no presente capítulo, para fins de obtenção do modelo matemático, admitir-se-ã que as hipóteses feitas são verdadeiras; posteriormente serão discutidos os fatores que fazem com que a condição de colinearidade se afaste da realidade, bem como a forma de tratã-los.

Observe-se que a condição de colinearidade não é a única relação matemática que pode ser utilizada na aerotriangulação analítica; entretanto, por ser a formulação adotada nos programas que deverão implementar o processo, é a única abordada aqui.

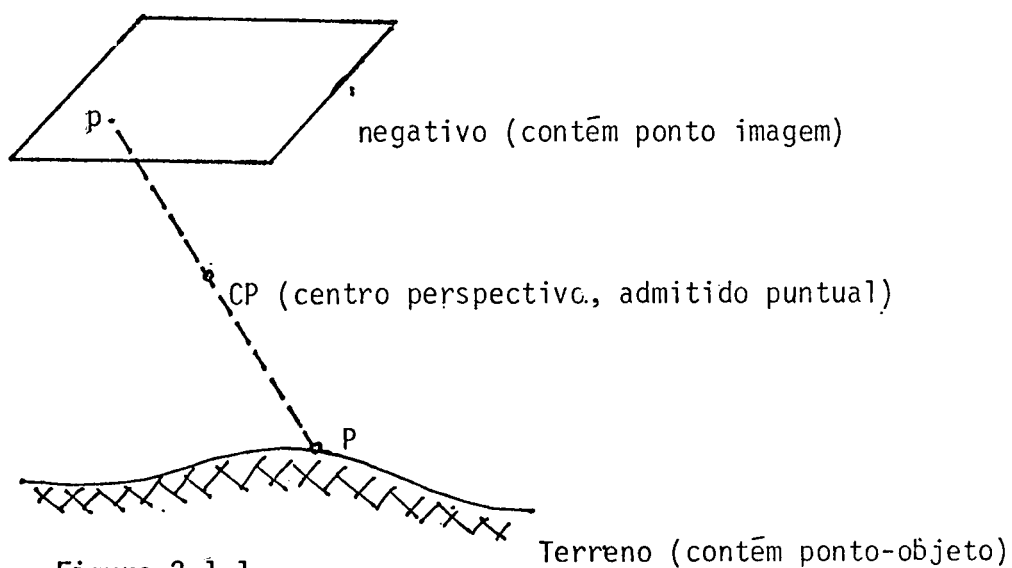


Figura 2.1.1

## 2.2 - OBTENÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO DA AEROTRIANGULAÇÃO ANALÍTICA

Vimos que o modelo matemático da aerotriangulação analítica está baseado na condição de colinearidade: admite-se que o ponto-objeto (no terreno), o centro perspectivo e o ponto-imagem (no plano do negativo) estão em linha reta. Essa colinearidade, na verdade, não existe, devido a fatores que influenciam a direção do raio luminoso e fatores que causam deslocamento na posição do ponto-imagem<sup>1</sup>; no entanto, sendo possível corrigir ou minimizar (analiticamente) os desvios introduzidos por tais fatores, torna-se possível impor a condição de colinearidade, a qual relaciona as coordenadas de terreno de um ponto-objeto com as coordenadas fotográficas de seu correspondente ponto-imagem. É o que será feito a seguir.

Admitindo-se um sistema de coordenadas com origem no centro perspectivo (sistema de coordenadas fotográficas a três dimensões ou sistema fotogramétrico), definido como em 1.3.2.b, o plano xy divide o espaço em duas regiões (veja-se figura 2.2.1): espaço-imagem (acima do centro perspectivo) e espaço-objeto (abaixo do centro perspectivo). As

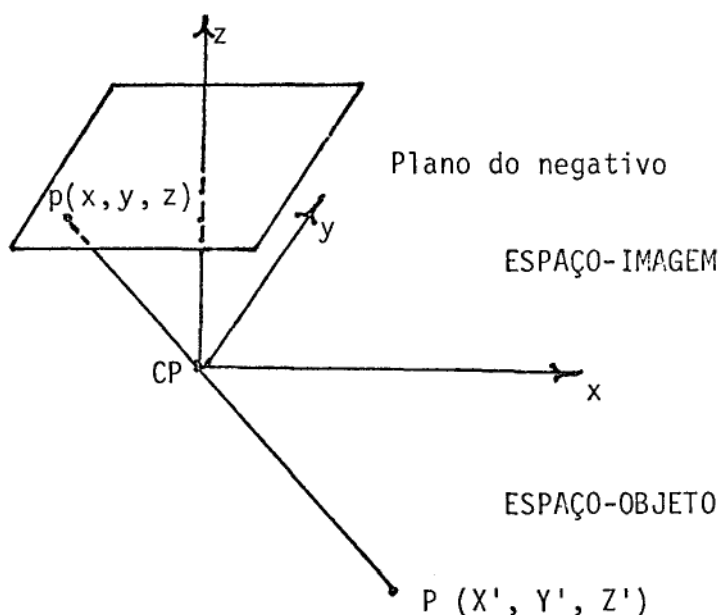


Figura 2.2.1

- <sup>1</sup> Fatores que afetam a colinearidade objeto-centro perspectivo-imagem:
- o centro perspectivo não é puntual; a hipótese feita nesse sentido é uma aproximação;
  - o raio luminoso é curvo, devido à refração atmosférica;
  - o raio luminoso sofre desvios ao atravessar o sistema de lentes da câmara fotogramétrica, devido às distorções apresentadas por essas lentes;
  - o filme não é plano;
  - o filme sofre deformações.

Existem ainda outros fatores que afetam a colinearidade mencionada; os mais críticos ou os que possuem fundamentação matemática estabelecida são discutidos no Capítulo Três do presente trabalho.



coordenadas fotográficas de p (ponto-imagem) são (x, y, z) enquanto as coordenadas de P (ponto-objeto) são (X', Y', Z'). Imposta a condição de colinearidade, é possível escrever a equação da reta p-CP-P, no espaço:

$$\frac{x}{X'} = \frac{y}{Y'} = \frac{z}{Z'}$$

Por conveniência, a equação acima será desmembrada, de modo a ter:

$$\frac{x}{X'} = \frac{z}{Z'} \quad \therefore \quad x = z \frac{X'}{Z'}$$

$$\frac{y}{Y'} = \frac{z}{Z'} \quad \therefore \quad y = z \frac{Y'}{Z'}$$

Observa-se, no entanto, que qualquer ponto-imagem p está situado sobre o plano do negativo, possuindo, em consequência, a mesma cota z; pode-se, então, fazer z=p, sendo p a distância principal da câmara utilizada; como existe necessidade de atender à equação dos focos conjugados<sup>2</sup>, temos que p=f e então:

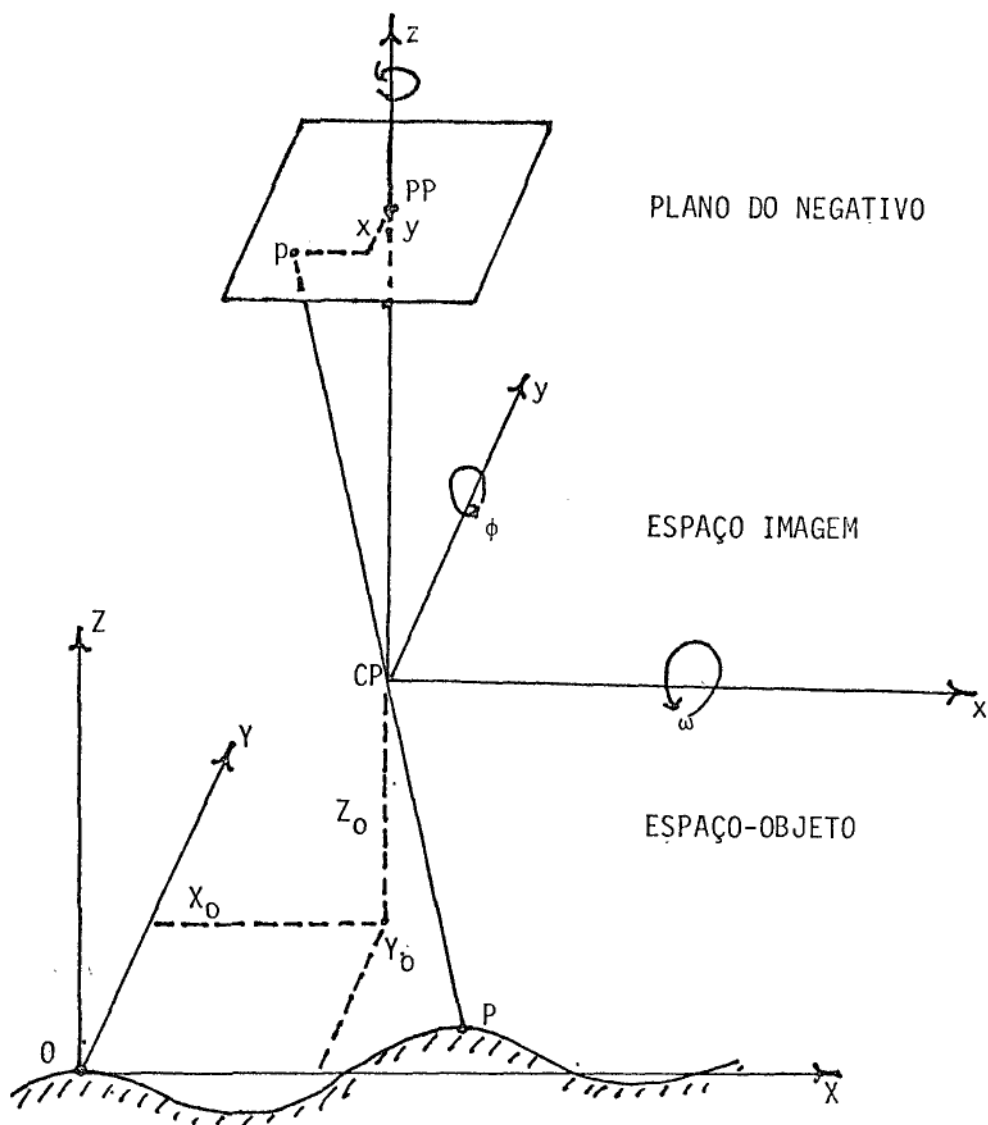
$$x = f \frac{X'}{Z'} \quad (2.2.1)$$

$$y = f \frac{Y'}{Z'} \quad (3)$$

x e y são as coordenadas fotográficas do ponto-imagem; se (X', Y', Z'), coordenadas fotográficas do ponto-objeto, puderem ser expressas em termos de coordenadas do terreno, então estarão relacionadas as coordenadas fotográficas do ponto-imagem com as coordenadas de terreno do ponto-objeto. A transformação de (X', Y', Z') para coordenadas do terreno se fará para o sistema de coordenadas geodésicas locais, visando não apenas economizar memória nas computações (pela redução do número de dígitos necessários para expressar as coordenadas) mas também "absorver" a questão da curvatura da terra, tornando-a transparente para quem utiliza o processo.

<sup>2</sup>  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ , sendo f a distância focal e p' a distância-objeto; como, para câmaras aéreas, p' = ∞, segue-se que  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p}$  e f=p; assim, nas câmaras aéreas, a distância principal coincide com a distância focal.

<sup>3</sup> Observe-se que, quando usado o diapositivo, o valor de f será negativo.



O ≡ Origem do sistema geodésico local Figura 2.2.2

Genericamente, três rotações são capazes de tornar paralelos dois sistemas de coordenadas, enquanto três translações podem fazer com que a origem dos dois sistemas se torne a mesma; acrescentando um fator de escala, a transformação de coordenadas pode ser escrita:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} R_\omega & R_\phi & R_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

em que:  $\kappa$  é o fator de escala;

$R_\omega$ ,  $R_\phi$  e  $R_k$  são as matrizes relativas às rotações em torno dos três eixos coordenados, necessárias para tornar paralelos os dois sistemas (veja-se figura 2.2.2);

<sup>4</sup> Na verdade, uma transformação de similaridade; supõe-se que a forma se mantém, variando as dimensões do objeto transformado.

X, Y e Z são as coordenadas do ponto P, no sistema geodésico local;

$X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$  são as coordenadas do centro perspectivo no sistema geodésico local.

Efetuada o produto das matrizes de rotação<sup>5</sup>:

$$M = R_{\omega} R_{\phi} R_k =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efetuada os produtos matriciais, vem:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos k & \cos \phi \sin k & -\sin \phi \\ \sin \omega \sin \phi \cos k - \cos \omega \sin k & \sin \omega \sin \phi \sin k + \cos \omega \cos k & \sin \omega \cos \phi \\ \cos \omega \sin \phi \cos k + \sin \omega \sin k & \cos \omega \sin \phi \sin k - \sin \omega \cos k & \cos \omega \cos \phi \end{pmatrix}$$

ou, para simplificar a notação:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Assim, da (2.2.2), tem-se:

$$X' = \kappa \left\{ m_{11} (X - X_0) + m_{12} (Y - Y_0) + m_{13} (Z - Z_0) \right\}$$

$$Y' = \kappa \left\{ m_{21} (X - X_0) + m_{22} (Y - Y_0) + m_{23} (Z - Z_0) \right\}$$

$$Z' = \kappa \left\{ m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0) \right\}$$

Substituindo nas (2.2.1) - equações de colinearidade - as coordenadas de P expressas no sistema com origem no centro perspectivo  $p_e$

<sup>5</sup> Observe-se que a ordem das rotações é irrelevante aqui; o mesmo não se passa para trabalhos analógicos.

las suas correspondentes coordenadas expressas no sistema geodésico local, vem:

$$\begin{aligned} x &= f \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ y &= f \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Observe-se que, no modelo matemático da aerotriangulação analítica, acima obtido, os parâmetros são  $\omega$ ,  $\phi$  e  $k$ , ângulos de rotação, e  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ , coordenadas geodésicas locais do centro perspectivo, os quais definem os elementos de orientação externa; se os  $m_{ij}$ , elementos da matriz de transformação  $M$ , forem considerados como parâmetros - seriam nove parâmetros aos quais se somariam mais três, dando um total de doze parâmetros - ter-se-ia de considerar que a matriz  $M$  é ortogonal e os  $m_{ij}$  não são independentes; como as relações entre eles são expressas por meio de seis equações, o grau de liberdade permanece o mesmo.

As (2.2.3) relacionam as coordenadas fotográficas do ponto-imagem, na fotografia, com as coordenadas geodésicas locais do correspondente ponto-objeto, no terreno. As coordenadas fotográficas dos pontos que participarão da aerotriangulação podem ser obtidas a partir das coordenadas instrumentais, medidas no equipamento aerotriangulador ou em um comparador. Se existe superabundância de pontos do terreno com coordenadas de terreno conhecidas (superabundância em relação ao número de parâmetros a determinar nas equações de colinearidade), será possível obter as coordenadas geodésicas locais de qualquer ponto do terreno representado na fotografia aérea; daí é possível chegar às coordenadas geodésicas elipsoidais desse ponto. O modelo matemático da aerotriangulação analítica pode, opcionalmente, incluir injunções relativas resultantes de observações de ângulos, distâncias, altitudes, etc... Certamente, tais observações ocorrem em trabalhos de Cartografia Náutica. No entanto, face a sua frequência relativamente pequena em tais trabalhos, não pareceu razoável sobrecarregar uma configuração de processamento de limitada capacidade com instruções de computador referentes a esses casos; a opção aqui efetuada é pelas "injunções absolutas", isto é, as observações serão constituídas apenas pelas coordenadas dos pontos de apoio à aerotri

angulação. Acrescentando que o método dos mínimos quadrados normalmente é utilizado para resolução do problema, permitindo o ajustamento dos valores obtidos, a questão poderia ser considerada esgotada, se não fosse pelos fatores que fazem com que o modelo matemático se afaste da realidade. Esses fatores são discutidos no capítulo seguinte.

### CAPÍTULO 3 - OS ERROS SISTEMÁTICOS E SUA CORREÇÃO

3.1 - Apresentação do problema

3.2 - O "trabalho" do filme

3.2.1 - Transformação das coordenadas instrumentais para coordenadas fiduciais

3.3 - Distorções das Lentes

3.4 - Refração Fotogramétrica

### 3.1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Várias fontes de erro afetam os resultados obtidos na aerotriangulação. Existem, basicamente, duas formas de tratar esses erros:

a) incluindo os parâmetros que descrevem seus efeitos no modelo matemático da aerotriangulação analítica (i.e., trazendo o modelo matemático à realidade); e

b) eliminando os erros à medida que ocorrem, fazendo com que as observações se aproximem do modelo matemático (i.e., trazendo a realidade ao modelo matemático).

Esse último processo, conhecido como refinamento da imagem, é o aqui adotado, face às condicionantes do trabalho (utilização de computadores de pequeno porte<sup>1</sup> e modularidade). Uma desvantagem que poderia ser argüida contra essa forma de tratar individualmente os erros sistemáticos é a possível existência de correlação entre os parâmetros dos modelos matemáticos adotados para descrevê-los e entre esses mesmos parâmetros e as incôgnitas das equações de colinearidade [15].

O modelo matemático da aerotriangulação analítica assume que o ponto-imagem, o centro perspectivo e o ponto-objeto estão em linha reta. Essa colinearidade não se mantém, na prática, devido a fatores que alteram a direção do raio luminoso (refração fotogramétrica e distorção ótica) e fatores que causam deslocamentos na posição do ponto-imagem (deformações do material fotográfico, falta de planificação do filme no instante da exposição, etc...). Serão essas as fontes de erro tratadas a seguir. Observe-se ainda que o modelo matemático da aerotriangulação analítica, tal como obtido no capítulo dois, coloca as coordenadas dos pontos do espaço-imagem no sistema de coordenadas fotográfico e os pontos de espaço-objeto no sistema de coordenadas geodésicas local. Antes de poder utilizar o modelo matemático os pontos a serem aerotriangulados deverão estar definidos em um ou outro (ou em ambos, no caso de

<sup>1</sup> Colocado dessa forma, o problema permitirá solução com o uso de calculadoras de bolso programáveis (ao nível da Texas TI-58 ou HP-34C), dispensando o recurso ao computador. Na verdade, os programas que implementam essa solução já estão desenvolvidos e serão publicados, após revisão, nos "Anais Hidrográficos" da Diretoria de Hidrografia e Navegação. Assim espera-se que mesmo ambientes que não disponham de computador possam realizar aerotriangulação analítica; pelo menos até a fase do ajustamento. Essa última fase, por requerer utilização mais extensiva de memória, não poderá ser desenvolvida usando as calculadoras citadas. Uma possível alternativa seria bloquear um equipamento de computação apenas para essa fase.

pontos de apoio) desses sistemas de coordenadas. Para o processo de refinamento da imagem os erros serão corrigidos na ordem inversa em que ocorrem [16]. Após efetuar as correções assume-se que a colinearidade entre os três pontos citados é verdadeira.

Devido ao sistema de coordenadas utilizado para definir os pontos do terreno, a curvatura da Terra é uma consideração irrelevante aqui, já que a superfície de referência para contagem de altitudes (isto é, a cota Z) é o plano XY; se fosse utilizado um sistema que se baseasse em uma superfície curva - um elipsóide, por exemplo - a curvatura da Terra teria de ser considerada. Embora obrigue à transformação do sistema UTM (ou elipsoidal) para o sistema local antes do processamento e à transformação inversa após, considerou-se preferível esse enfoque, uma vez que "absorve" essa fonte de erro sistemático.

Observe-se que, sendo realizadas correções analíticas às observações, não existe sentido em realizar correções analógicas: tal procedimento implicaria em duplicação de correções. No caso de utilização do redutor WILD U3-A não deverão ser utilizadas as placas de compensação<sup>2</sup> de que dispõe o equipamento. Essas placas de compensação são empregadas normalmente no procedimento analógico, por ocasião da geração do diapositivo destinado ao aparelho aerotriangulador, refletindo valores médios para cada tipo de câmara aérea, em uma tentativa de compensar fisicamente as deformações apresentadas pelo sistema fotogramétrico que inclui a câmara aérea utilizada. Quando o diapositivo se destina ao autógrafo WILD A-9, a razão de redução deverá ser 1:2, mesmo que tenha sido constatada distorção do filme.

### 3.2 - O "TRABALHO" DO FILME

Embora a maior parte dos filmes utilizados em operações fotogramétricas possua boa estabilidade dimensional, ocorrem deformações tanto no processamento como no armazenamento desses filmes. As medições efetuadas sobre uma fotografia estarão, em consequência, afetadas por erros causados pelo "trabalho" do material que suporta a emulsão. No caso da aerotriangulação analítica, em que são medidas coordenadas na fotografia, é necessário corrigir esses valores, antes que possam ser usados em

<sup>2</sup> As placas de compensação destinam-se a reduzir as influências devidas à distorção da imagem, curvatura terrestre e refração [17].



cálculos fotogramétricos, visando impedir que as deformações apresentadas pelo filme se propaguem aos resultados finais do trabalho.

Basicamente, o filme apresenta deformações em função do material empregado (papel ou vidro), de seu envelhecimento e de variações na temperatura, umidade e tensão a que está submetido. Observa-se, ainda, que as condições de processamento e de armazenamento podem se tornar fatores críticos quando se afastam daquelas recomendadas pelo fabricante e que a estabilidade dimensional do material fotográfico, observada em laboratório pelo fabricante, muitas vezes não é reproduzida em condições reais de operação [18].

As deformações apresentadas pelos filmes poderiam, para propósitos didáticos, ser classificadas em [19]:<sup>1</sup>

a) deformação sistemática (ou uniforme): a deformação é considerada radial e constante, em qualquer ponto da fotografia;

b) deformação diferencial sistemática: a deformação possui um valor para x e outro para y, permanecendo linear, entretanto;

c) deformação irregular: não apresenta um padrão de distribuição previsível, possuindo um valor próprio em cada direção.

O "trabalho" do filme será modelado durante o processo de transformação das coordenadas instrumentais para coordenadas fiduciais, juntamente com o erro sistemático proveniente da não-ortogonalidade dos eixos do instrumento no qual foi realizada a leitura das coordenadas dos pontos imageados. A transformação projetiva será utilizada sempre que se dispuser de mais de quatro marcas fiduciais<sup>1</sup>; quando se dispõe de quatro marcas fiduciais, essa transformação permite utilizar todas as informações fornecidas por essas marcas, podendo, em consequência, eliminar a deformação irregular nesses pontos; para mais de quatro marcas fiduciais disponíveis a deformação irregular é minimizada nessas marcas. Embora com quatro marcas fiduciais ainda seja possível solução matemática usan

<sup>1</sup> As deformações do filme são detetadas pela comparação entre as medidas instrumentais das marcas fiduciais e as medidas fiduciais dessas mesmas marcas, fornecidas no certificado de calibração da câmara utilizada.

do a transformação projetiva<sup>2</sup>, desaparece a possibilidade de solução pelo método dos mínimos quadrados, uma vez que não existe super-abundância de observações; como resultado, desaparece a possibilidade de detecção de erros grosseiros pelo sistema, o que não se considera conveniente. Nesses casos será utilizada a transformação afim para mudança de sistema de coordenadas; essa transformação, embora também permita modelar as deformações lineares apresentadas pelo filme e tratar o problema da não-ortogonalidade dos eixos do aparelho de medida, normalmente não eliminará a deformação irregular nas marcas fiduciais. No entanto, possuirá suficiente grau de liberdade<sup>3</sup> para permitir a detecção de erros grosseiros.

Existem câmaras que possibilitam a obtenção de fotos com uma densa malha de marcas fiduciais - o "Reseau". Essa rede de pontos com coordenadas bem determinadas permite um tratamento mais rigoroso das deformações apresentadas pela foto. Tal tratamento, importante para fins de pesquisa, não é compensador aqui, onde o propósito é cartografia sistêmica e a ordem de grandeza dos erros esperados na leitura supera - em condições normais - a deformação não-linear que o processo poderia modelar.

<sup>2</sup> Existem oito parâmetros a determinar e as quatro marcas fiduciais fornecem oito equações; dispõe-se, portanto, de oito equações a oito incógnitas, o que permite solução única para o sistema.

<sup>3</sup> Desde que sejam lidas as coordenadas de, pelo menos, quatro marcas fiduciais. Sendo disponíveis apenas três marcas a solução é única e, de maneira análoga à transformação projetiva usando quatro pontos, desaparece a possibilidade de detectar erros acidentais ao registrar as coordenadas instrumentais lidas.

### 3.2.1 - TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS INSTRUMENTAIS PARA COORDENADAS FIDUCIAIS

Como visto no capítulo dois, o modelo matemático da aerotriangulação analítica relaciona, para um ponto no terreno e sua imagem na foto, as coordenadas no terreno com as coordenadas fotográficas. Observe-se, no entanto, que o que se mede durante a aerotriangulação são as coordenadas instrumentais dos pontos-imagem, no sistema de coordenadas do instrumento utilizado e que possui uma origem arbitrária qualquer. É necessário transformar as coordenadas desse sistema instrumental para o sistema fiducial e daí para o sistema fotográfico, com origem no ponto principal da foto. Essa transformação é possível, desde que estejam disponíveis as coordenadas fiduciais das marcas fiduciais e do ponto principal, obtidas na calibração da câmara aérea usada na realização do vôo fotogramétrico; o processo consistirá, essencialmente, em comparar as coordenadas instrumentais das marcas fiduciais, lidas no aerotriangulador (ou comparador, se for esse o caso) com suas correspondentes coordenadas fiduciais de calibração, extraíndo daí os valores dos parâmetros necessários à passagem de um sistema de coordenadas para o outro.

A aplicação desses parâmetros de transformação às coordenadas instrumentais dos pontos que participarão da aerotriangulação permitirá obter suas coordenadas fiduciais; a aplicação, a essas coordenadas, dos valores das coordenadas fiduciais do ponto principal permitirá, afinal, efetuar as translações necessárias à obtenção das coordenadas fotográficas dos pontos imageados. Tais transformações são necessárias não apenas por consistência com as equações projetivas, mas, também, porque o deslocamento das imagens em função dos erros sistemáticos ocorre em relação ao ponto principal da fotografia. Adicionalmente, a transformação das coordenadas instrumentais para coordenadas fiduciais absorve os efeitos devidos ao "trabalho" do filme e não ortogonalidade dos eixos do aparelho de leitura.

a) Transformação de coordenadas usando a transformação projetiva:  
a transformação projetiva será usada quando estiverem disponíveis as

coordenadas de mais de quatro marcas fiduciais<sup>1</sup>; dessa maneira, face a super-abundância de observações, será possível realizar um ajustamento pelo método dos números quadrados (M.M.Q.).

A expressão geral da transformação projetiva, no plano, é dada pelas (1.4.5.1):

$$\begin{aligned} X &= \frac{a_1x + a_2y + a_3}{a_4x + a_5y + 1} \\ Y &= \frac{a_6x + a_7y + a_8}{a_4x + a_5y + 1} \end{aligned} \quad (1.4.5.1)$$

No caso presente, tem-se:

$(X, Y)$  = coordenadas instrumentais (observadas);

$(x, y)$  = coordenadas fiduciais;

$a_1, a_2, \dots, a_8$  = parâmetros da transformação a serem determinados durante o ajustamento.

As (1.4.5.1) permitem identificar o modelo matemático do ajustamento, característico do método paramétrico, no qual os valores observados ajustados constituem função explícita dos parâmetros ajustados [20]:

$$L_a = F(X_a) \quad (3.2.1.1)$$

Utilizando os termos lineares do desenvolvimento em série de Taylor para linearizar a (3.2.1.1)<sup>2</sup>, vem [21]:

$$L_a = F(X_0) + \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0} (X_a - X_0)$$

<sup>1</sup> Vide situações esquematizadas nas Fig. 3.2.1;

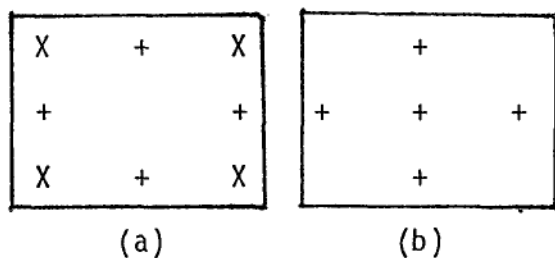


Fig. 3.2.1

<sup>2</sup> O desenvolvimento aqui realizado desembocará em expressões de caráter geral, isto é, válidas, também, quando  $L_a = F(X_a)$  expressa uma relação linear.

sendo:

$L_a$  = vetor dos valores observados ajustados<sup>3</sup>;

$X_0$  = vetor de parâmetros aproximados; estes valores são estimados de alguma forma, analítica ou graficamente; constitui o "ponto de expansão" do desenvolvimento em série;

$X_a$  = vetor dos parâmetros ajustados.

Como

$$L_a = L_b + V \quad (3.2.1.2)$$

isto é, o vetor dos valores observados ajustados é igual ao vetor dos valores observados ( $L_b$ ) mais um vetor de resíduos ( $V$ ), tem-se:

$$L_b + V = F(X_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} (X_a - X_0)$$

Fazendo

$$\left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} = A \quad (\text{i.e., } A \text{ é a matriz das derivadas parciais do modelo matemático em relação aos parâmetros, no ponto } X_0) \text{ e}$$

$$X_a - X_0 = X \quad (\text{i.e., } X \text{ é o vetor das correções a serem aplicadas aos valores estimados para obter o vetor dos parâmetros ajustados}), \text{ vem:}$$

$$L_b + V = F(X_0) + AX;$$

como  $F(X_0) = L_0$ , substituindo na expressão acima, vem:

$$L_b + V = L_0 + AX;$$

fazendo

$$L_0 - L_b = L$$

e dispondo a expressão na forma consagrada, obtém-se finalmente o modelo matemático linearizado do método paramétrico

$$AX + L = V, \quad (3.2.1.3)$$

cujas soluções, impondo-se a condição de mínimos quadrados, serão [22]:

<sup>3</sup> A notação, ao se tratar de ajustamento, será sempre matricial.

$$X = - (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad , \quad (3.2.1.4)$$

sendo P a matriz dos pesos atribuídos às observações. A matriz dos pesos é obtida a partir da matriz variância-covariância (MV-C) dos valores observados ( $\Sigma_{L_b}$ ), a qual é formada pelas variâncias e covariâncias das observações, como abaixo:

$$\Sigma_{L_b} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 Y_1} & \dots & \sigma_{X_1 Y_n} \\ \sigma_{Y_1 X_1} & \sigma_{Y_1}^2 & \dots & \sigma_{Y_1 Y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Y_n X_1} & \sigma_{Y_n Y_1} & \dots & \sigma_{Y_n}^2 \end{pmatrix} \quad (3.2.1.5)$$

A matriz dos pesos será dada por [23]:

$$P = \sigma_0^2 L_b^{-1} \quad , \quad (3.2.1.6)$$

sendo  $\sigma_0^2$  a variância da observação de peso unitário.

Quando se dispõe de oito marcas fiduciais, como no caso representado na figura 3.2.1, resulta  $m=2 \times n = 2 \times 8 = 16$  observações; o grau de liberdade, portanto, usando-se a transformação projetiva, será  $s = m - u = 16 - 8 = 8$ , uma vez que o mínimo de parâmetros a determinar é igual a oito.

Como as observações realizadas são independentes entre si, a MV-C dos valores observados será uma matriz diagonal: todas as covariâncias são nulas; em consequência a matriz dos pesos também será uma matriz diagonal. Para o caso dos diapositivos obtidos com o redutor WILD U3-A e realizando a leitura das coordenadas no autógrafo WILD A-9, o valor do elemento diagonal da matriz dos pesos será<sup>4</sup>:

<sup>4</sup> Note-se que todas as observações possuem a mesma confiança. Para a obtenção da variância das observações usando diapositivos no autógrafo WILD A-9 utilizou-se um número relativamente grande de medições e diferentes operadores. Em outra configuração o valor da variância dos valores observados naturalmente será outro. Como estimativa grosseira do desvio padrão pode-se assumir o dobro da menor leitura possível no equipamento.

$$p_i = \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{(0,0170 \text{ [m m]})^2} \approx 3460$$

Dessa forma o aspecto da matriz dos pesos no exemplo abordado (diapositivo gerado no redutor WILD U3-A e lido no autógrafo WILD A-9) será:

$$P = \begin{pmatrix} 3460 & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}_{16 \times 16}$$

As coordenadas, nesse caso, serão lidas em milímetros.

Para a origem do sistema instrumental fixada como descrito no capítulo um, item 1.3.2.c<sup>5</sup>, tem-se (unidades em milímetros):

$$X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}_{u \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 115 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 115 \end{pmatrix}_{8 \times 1}$$

De posse dos valores aproximados dos parâmetros é possível calcular  $L_0 = F(X_0)$  e  $L = L_0 - L_b$ .

$$L_0 = \begin{pmatrix} x_1 + 115 \\ y_1 + 115 \\ \vdots \\ x_8 + 115 \\ y_8 + 115 \end{pmatrix}_{16 \times 1}$$

<sup>5</sup> Origem próxima à extremidade inferior esquerda do diapositivo; esse é o caso típico do autógrafo WILD A-9 (diapositivo 115 x 115mm), em que se busca evitar a ocorrência de coordenadas instrumentais negativas, as quais apresentam alguma dificuldade para leitura. Para outras situações, outros serão os valores aproximados dos parâmetros.

$x_i, y_i$  = valores das coordenadas fiduciais das marcas fiduciais, em milímetros;

$$L_b = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ X_8 \\ Y_8 \end{pmatrix}_{16 \times 1}$$

$X_i, Y_i$  = valores das coordenadas instrumentais das marcas fiduciais, em milímetros;

É possível também calcular a matriz A:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \frac{\partial X_1}{\partial a_2} & \frac{\partial X_1}{\partial a_3} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial a_8} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial a_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial a_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial a_3} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial a_8} \\ \frac{\partial X_2}{\partial a_1} & \frac{\partial X_2}{\partial a_2} & \frac{\partial X_2}{\partial a_3} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial a_8} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial a_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial a_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial a_3} & \dots & \frac{\partial Y_2}{\partial a_8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_8}{\partial a_1} & \frac{\partial X_8}{\partial a_2} & \frac{\partial X_8}{\partial a_3} & \dots & \frac{\partial X_8}{\partial a_8} \\ \frac{\partial Y_8}{\partial a_1} & \frac{\partial Y_8}{\partial a_2} & \frac{\partial Y_8}{\partial a_3} & \dots & \frac{\partial Y_8}{\partial a_8} \end{pmatrix}_{16 \times 8}$$



$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{a_4x_1 + a_5y_1 + 1} & \frac{y_1}{a_4x_1 + a_5y_1 + 1} & \frac{1}{a_4x_1 + a_5y_1 + 1} & -\frac{x_1(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3)}{(a_4x_1 + a_5y_1 + 1)^2} & -\frac{y_1(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3)}{(a_4x_1 + a_5y_1 + 1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x_1(a_6x_1 + a_7y_1 + a_8)}{(a_4x_1 + a_5y_1 + 1)^2} & -\frac{y_1(a_6x_1 + a_7y_1 + a_8)}{(a_4x_1 + a_5y_1 + 1)^2} & \frac{x_1}{a_4x_1 + a_5y_1 + 1} & \frac{y_1}{a_4x_1 + a_5y_1 + 1} & \frac{1}{a_4x_1 + a_5y_1 + 1} \\ \frac{x_8}{a_4x_8 + a_5y_8 + 1} & \frac{y_8}{a_4x_8 + a_5y_8 + 1} & \frac{1}{a_4x_8 + a_5y_8 + 1} & -\frac{x_8(a_1x_8 + a_2y_8 + a_3)}{(a_4x_8 + a_5y_8 + 1)^2} & -\frac{y_8(a_1x_8 + a_2y_8 + a_3)}{(a_4x_8 + a_5y_8 + 1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x_5(a_6x_8 + a_7y_8 + a_8)}{(a_4x_8 + a_5y_8 + 1)^2} & -\frac{y_5(a_6x_8 + a_7y_8 + a_8)}{(a_4x_8 + a_5y_8 + 1)^2} & \frac{x_8}{a_4x_8 + a_5y_8 + 1} & \frac{y_5}{a_4x_8 + a_5y_8 + 1} & \frac{1}{a_4x_8 + a_5y_8 + 1} \end{bmatrix}$$

Uma vez calculados  $P$ ,  $A$ ,  $L_0$  e  $L_b$  é possível calcular o vetor das correções,  $X$ :

$$X = - (A^T P A)^{-1} A^T P L,$$

bem como o vetor dos parâmetros ajustados,  $X_a$ :

$$X_a = X_0 + X$$

Observe-se que obtivemos os parâmetros que permitem a passagem do sistema fiducial para o sistema instrumental; na verdade, deseja-se justamente o contrário, isto é, passar do sistema instrumental para o sistema fiducial. Após uma série de algebrismos obtém-se as expressões que possibilitam, conhecendo-se as coordenadas instrumentais e os parâmetros da transformação, realizar a mudança de coordenadas desejada:

$$y_i = \frac{x_i(a_4 Y_i - a_6) + (Y_i - a_8)(X_i - a_3)(a_4 Y_i - a_6) + (Y_i - a_8)(a_1 - a_4 X_i)}{(a_7 - a_5 Y_i)(a_1 - a_4 X_i) - (a_5 X_i - a_2)(a_4 Y_i - a_6)}$$

$$x_i = \frac{y_i(a_5 X_i - a_2) + (X_i - a_3)}{(a_1 - a_4 X_i)} \quad (3.2.1.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

Resta agora definir a questão da precisão do ajustamento e da propagação dos erros.

A MV-C (matriz variância-covariância) dos parâmetros ajustados pode ser obtida pela expressão [24]:

$$\Sigma_{X_a} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}, \quad (3.2.1.8)$$

sendo  $\sigma_0^2$  a variância da observação de peso unitário, a priori, a qual foi arbitrada como sendo de valor unitário (vide formação da matriz dos pesos dos valores observados).

A variância da observação de peso unitário, a posteriori, é obtida pela expressão [24]:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{s} \quad (3.2.1.9)$$

Uma vez obtido o valor a posteriori é feito um teste para a hipótese básica de que os valores a priori e a posteriori são iguais, utilizando a distribuição qui-quadrado:

$$H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_A: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Se a hipótese básica for rejeitada<sup>6</sup> deve-se examinar a possibilidade da ocorrência de erros grosseiros na leitura (ou no registro) das coordenadas e refazer o trabalho<sup>7</sup>.

Uma vez aceita a hipótese básica é possível, mediante a lei de propagação de variâncias e co-variâncias, obter a MV-C das coordenadas fiduciais calculadas a partir das coordenadas instrumentais e dos parâmetros de transformação, bem como sua matriz dos pesos; tais pesos serão necessários em fases posteriores da aerotriangulação.

O modelo matemático que liga as coordenadas fiduciais às coordenadas instrumentais (vide expressões (3.2.1.7)) não é linear; para o modelo não linear  $Y=F(X)$ , a lei de propagação de variâncias e covariâncias se escreve [25]:

$$\Sigma_Y = D \cdot \Sigma_X \cdot D^T \quad (3.2.1.10)$$

No caso:

$\Sigma_X =$  MV - C das coordenadas instrumentais (vide matriz (3.2.1.5))

$\Sigma_Y =$  MV - C das coordenadas fiduciais

<sup>6</sup> O nível de significância aqui utilizado para teste de hipótese é de 5%.

<sup>7</sup> Quando se deseja um rigor maior no ajustamento deve-se promover iterações, fazendo com que os valores ajustados em uma etapa sejam os valores aproximados da etapa seguinte, até que o vetor  $X$  das correções se aproxime de zero da quantidade julgada suficiente.

$$D = \frac{\partial F}{\partial X} \bigg|_{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial X_n} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial X_n} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial X_1} & \frac{\partial x_n}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial X_n} & \frac{\partial x_n}{\partial Y_n} \\ \frac{\partial y_n}{\partial X_1} & \frac{\partial y_n}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial X_n} & \frac{\partial y_n}{\partial Y_n} \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

À vista das expressões (3.2.1.7) é possível escrever:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial X_j} = 0 \quad , \quad (3.2.1.11)$$

para todo  $i \neq j$ .

O desenvolvimento das (3.2.1.7) fornecerá

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_1 X + A_2 Y + A_3}{A_4 X + A_5 Y + A_6} \\ y &= \frac{A_7 X + A_8 Y + A_9}{A_4 X + A_5 Y + A_6} \end{aligned} \quad (3.2.1.12)$$

desde que:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_7 - a_5 a_8 & A_7 &= a_4 a_8 - a_6 \\ A_2 &= a_2 + a_3 a_5 & A_8 &= a_1 - a_3 a_4 \\ A_3 &= -a_2 a_8 - a_3 a_7 & A_9 &= a_3 a_6 - a_1 a_8 \\ A_4 &= a_5 a_6 - a_4 a_7 \\ A_5 &= a_2 a_4 - a_1 a_5 \\ A_6 &= a_1 a_7 - a_2 a_6 \end{aligned} \quad (3.2.1.13)$$

Dessa forma, para todo  $i=j$ , vem:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} &= \frac{A_1(A_4X_j + A_5Y_j + A_6) - A_4(A_1X_j + A_2Y_j + A_3)}{(A_4X_j + A_5Y_j + A_6)^2} \\
 \frac{\partial x_i}{\partial Y_j} &= \frac{A_2(A_4X_j + A_5Y_j + A_6) - A_5(A_1X_j + A_2Y_j + A_3)}{(A_4X_j + A_5Y_j + A_6)^2} \\
 \frac{\partial y_i}{\partial X_j} &= \frac{A_7(A_4X_j + A_5Y_j + A_6) - A_4(A_7X_j + A_8Y_j + A_9)}{(A_4X_j + A_5Y_j + A_6)^2} \\
 \frac{\partial y_i}{\partial Y_j} &= \frac{A_8(A_4X_j + A_5Y_j + A_6) - A_5(A_7X_j + A_8Y_j + A_9)}{(A_4X_j + A_5Y_j + A_6)^2}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1.14}$$

As expressões (3.2.1.11) e (3.2.1.14) permitem escrever a matriz D; uma vez que a MV - C das coordenadas instrumentais  $\bar{e}$  conhecida, será possível calcular a MV - C das coordenadas fiduciais por meio da relação (3.2.1.10). A expressão

$$P = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_0^2 & \Sigma_y^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.2.1.15}$$

permitirá obter a matriz dos pesos das coordenadas fiduciais; essa matriz será necessariamente simétrica, mas não será uma matriz diagonal, uma vez que existe dependência entre  $x$  e  $y$ , como mostram as (3.2.1.7)..

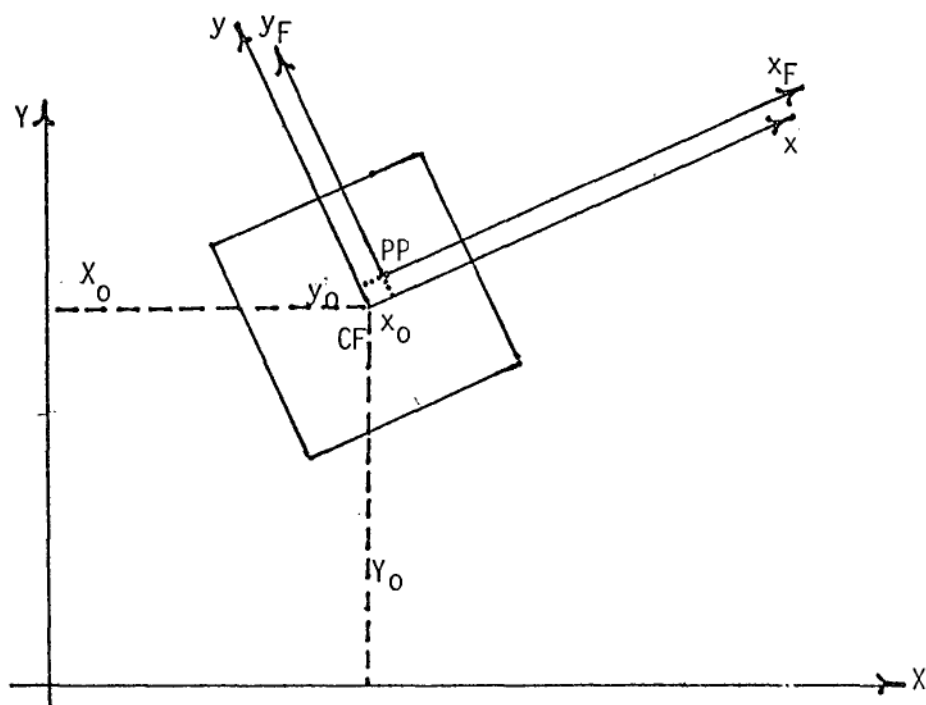
Observe-se que, sendo conhecidos os valores de  $x_0$  e  $y_0$  (coordenadas do ponto principal em relação ao sistema fiducial)<sup>8</sup>, será possível referir as coordenadas dos pontos que participarão da aerotriangulação ao sistema de coordenadas fotográfico, com origem no ponto principal da fotografia. Assim, obedecidas as convenções para os sistemas de fotocoordenadas e a simbologia aqui adotados, as coordenadas fotográficas de um ponto genérico  $j$  seriam dadas por  $(x_j - x_0, y_j - y_0)$ <sup>9</sup>. A matriz dos pesos das coordenadas fotográficas é a mesma que para as coordenadas fiduciais já calculada.

<sup>8</sup> Esses valores são fornecidos nos certificados de calibração das câmeras métricas.

<sup>9</sup> Admitiu-se  $(x_0, y_0)$  isentos de erro, o que pareceu razoável para os fins em vista.

Uma vez obtidas as coordenadas fotográficas e sua matriz dos pesos, serão esses os elementos levados em conta durante o restante do processo.

A figura 3.2.2 esquematiza as transformações de coordenadas realizadas.



$X$  e  $Y$  = eixos do sistema de coordenadas instrumental

$x$  e  $y$  = eixos do sistema de coordenadas fiducial

$x_F$  e  $y_F$  = eixos do sistema de coordenadas fotográfico

Figura 3.2.2

b) Transformação de coordenadas usando a transformação afim: a transformação afim será usada quando estiverem disponíveis apenas as coordenadas de quatro marcas fiduciais<sup>1</sup>; dessa forma, face à super-abundância de observações, será possível realizar um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados (M.M.Q.).

<sup>1</sup> Vide observação (3) de pé de página, item 3.2.

A expressão geral da transformação afim, no plano, é dada pelas (1.4.4.2):

$$\begin{aligned} X &= a_1 + b_1 x + c_1 y \\ Y &= a_2 + b_2 x + c_2 y \end{aligned} \quad (1.4.4.2)$$

No caso presente tem-se:

(X, Y) = coordenadas instrumentais (observadas);

(x, y) = coordenadas fiduciais

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  = parâmetros da transformação, a serem determinados durante o ajustamento.

As (1.4.4.2) permitem identificar o modelo matemático do ajustamento, característico do método paramétrico, no qual os valores observados ajustados constituem função explícita dos parâmetros ajustados [20]:

$$L_a = F(X_a)$$

Uma série de desenvolvimentos<sup>2</sup> permitirá chegar ao modelo matemático linearizado do método paramétrico, bem como à sua solução, imposta a condição de mínimos quadrados:

$$A X + L = V \quad (3.2.1.3)$$

$$X = - (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (3.2.1.4)$$

De forma análoga à mostrada no item anterior, a MV - C dos valores observados, para o caso dos diapositivos usados no autógrafo WILD A-9 seria, considerando-se as quatro marcas fiduciais<sup>3</sup>:

$$\Sigma_{Lb} = \begin{pmatrix} 0,0170^2 & & & \\ & \text{---} & & \\ & & \underline{0} & \\ & \underline{0} & & \text{---} \\ & & & 0,0170^2 \end{pmatrix}_{8 \times 8} \quad (3.2.1.16)$$

<sup>2</sup> Vide 3.2.1.a).

<sup>3</sup> Coordenadas lidas em milímetros.

A matriz dos pesos correspondentes seria:

$$P = \begin{pmatrix} 3460 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

Para a origem do sistema instrumental fixada como descrito no capítulo um, item 1.3.2.c, tem-se<sup>4</sup>:

$$X_0 = \begin{pmatrix} o \\ a_1 \\ o \\ b_1 \\ o \\ c_1 \\ o \\ a_2 \\ o \\ b_2 \\ o \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 \\ 1 \\ 0 \\ 115 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{6 \times 1}$$

De posse dos valores aproximados dos parâmetros é possível calcular  $L_0 = F(X_0)$  e  $L = L_0 - L_b$ :

$$L_0 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 115 \\ 115 \\ 230 \\ 230 \\ 115 \\ 115 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>4</sup> Vide nota 5 de pé de página, item 3.2:1.a).



$$L_b = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix}_{8 \times 1}$$

$X_i, Y_i$  = valores das coordenadas instrumentais das marcas fiduciais, em milímetros.

Será possível, também, calcular a matriz A:

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \frac{\partial X_1}{\partial b_1} & \frac{\partial X_1}{\partial c_1} & \frac{\partial X_1}{\partial a_2} & \frac{\partial X_1}{\partial b_2} & \frac{\partial X_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial a_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial b_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial c_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial a_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial b_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial c_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial a_1} & \frac{\partial X_2}{\partial b_1} & \frac{\partial X_2}{\partial c_1} & \frac{\partial X_2}{\partial a_2} & \frac{\partial X_2}{\partial b_2} & \frac{\partial X_2}{\partial c_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X_4}{\partial a_1} & \frac{\partial X_4}{\partial b_1} & \frac{\partial X_4}{\partial c_1} & \frac{\partial X_4}{\partial a_2} & \frac{\partial X_4}{\partial b_2} & \frac{\partial X_4}{\partial c_2} \\ \frac{\partial Y_4}{\partial a_1} & \frac{\partial Y_4}{\partial b_1} & \frac{\partial Y_4}{\partial c_1} & \frac{\partial Y_4}{\partial a_2} & \frac{\partial Y_4}{\partial b_2} & \frac{\partial Y_4}{\partial c_2} \end{pmatrix}_{8 \times 6}$$

Então:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

Uma vez calculados  $P$ ,  $A$ ,  $L_0$  e  $L$ , é possível calcular o ve tor das correções,  $X$ :

$$X = - (A^T P A)^{-1} A^T P L,$$

bem como o vetor dos parâmetros ajustados,  $X_a$ :

$$X_a = X_0 + X$$

Observe-se que foram obtidos os parâmetros que permitem a passagem do sistema de coordenadas fiducial para o sistema de coordena das instrumental; na verdade, deseja-se justamente o contrário, isto é, passar do sistema de coordenadas instrumental para o sistema de coordena das fiducial. Após uma série de algebrismos obtem-se as expressões que possibilitam, conhecendo-se as coordenadas instrumentais e os parâmetros da transformação, realizar a mudança de coordenadas desejada:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} - \frac{c_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} X_i + \frac{c_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} Y_i \\ y_i &= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} - \frac{b_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} X_i - \frac{b_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} Y_i \end{aligned} \quad (3.2.1.17)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

ou

$$\begin{aligned} x_i &= A_1 + B_1 X_i + C_1 Y_i \\ y_i &= A_2 + B_2 X_i + C_2 Y_i \end{aligned} \quad (3.2.1.18)$$

desde que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \\ B_1 &= - \frac{c_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \\ C_1 &= \frac{c_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \\ A_2 &= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \\ B_2 &= \frac{b_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \\ C_2 &= - \frac{b_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \end{aligned} \quad (3.2.1.19)$$

Resta definir a questão da precisão do ajustamento e da propagação dos erros.

A MV-C (matriz variância - covariância) dos parâmetros a justados pode ser obtida pela expressão [24]:

$$\Sigma_{X_a} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} , \quad (3.2.1.8)$$

sendo  $\sigma_0^2$  a variância da observação de peso unitário, a priori, a qual foi arbitrada como sendo de valor unitário.

A variância da observação de peso unitário, a posteriori, é obtida pela expressão [24]:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{s} \quad (3.2.1.9)$$

Uma vez obtido o valor a posteriori, é feito um teste para a hipótese básica de que os valores a priori e a posteriori são iguais, utilizando a distribuição qui-quadrado:<sup>4a</sup>

$$H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_A: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

Se a hipótese básica for rejeitada<sup>5</sup> deve-se examinar a possibilidade da ocorrência de erros grosseiros na leitura (ou no registro) das coordenadas e refazer o trabalho.

Uma vez aceita a hipótese básica é possível, mediante a lei de propagação de variâncias e covariâncias, obter a MV-C das coordenadas fiduciais calculadas a partir das coordenadas instrumentais e dos parâmetros de transformação, bem como suas matrizes dos pesos; tais pesos serão necessários em fases posteriores da aerotriangulação.

Sendo  $Y=F(X)$  o modelo matemático que liga as coordenadas fiduciais às coordenadas instrumentais (vide expressões (3.2.1.17), a lei de propagação de variâncias e covariâncias pode ser escrita [25]:

<sup>4a</sup>  $V^T P V$  é que é testado, na verdade.

<sup>5</sup> Vide nota (6) de pé de página, item 3.2.1.a).

<sup>6</sup> Vide nota (7) de pé de página, item 3.2.1.a).

$$\Sigma_Y = D \Sigma_X D^T \quad (3.2.1.10)$$

No caso:

$\Sigma_X = MV - C$  das coordenadas instrumentais (vide matriz (3.2.1.16)).

$\Sigma_Y = MV - C$  das coordenadas fiduciais

$$D = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_3} & \frac{\partial x_1}{\partial X_4} & \frac{\partial x_1}{\partial Y_4} \\ \frac{\partial y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial y_1}{\partial X_2} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial y_1}{\partial X_3} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_3} & \frac{\partial y_1}{\partial X_4} & \frac{\partial y_1}{\partial Y_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_4}{\partial X_1} & \frac{\partial x_4}{\partial Y_1} & \frac{\partial x_4}{\partial X_2} & \frac{\partial x_4}{\partial Y_2} & \frac{\partial x_4}{\partial X_3} & \frac{\partial x_4}{\partial Y_3} & \frac{\partial x_4}{\partial X_4} & \frac{\partial x_4}{\partial Y_4} \\ \frac{\partial y_4}{\partial X_1} & \frac{\partial y_4}{\partial Y_1} & \frac{\partial y_4}{\partial X_2} & \frac{\partial y_4}{\partial Y_2} & \frac{\partial y_4}{\partial X_3} & \frac{\partial y_4}{\partial Y_3} & \frac{\partial y_4}{\partial X_4} & \frac{\partial y_4}{\partial Y_4} \end{pmatrix}_{8 \times 8}$$

À vista das expressões (3.2.1.18) é possível escrever:

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial X_j} = \frac{\partial y_i}{\partial Y_j} = 0, \quad (3.2.1.20)$$

para todo  $i \neq j$ . Para todo  $i=j$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} &= B_1 & \frac{\partial y_i}{\partial Y_j} &= C_2 \\ \frac{\partial x_i}{\partial Y_j} &= C_1 & & \\ \frac{\partial y_i}{\partial X_j} &= B_2 & & \end{aligned} \quad (3.2.1.21)$$

As expressões (3.2.1.20) e (3.2.1.21) permitem escrever a matriz D:

$$D = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Uma vez que a MV - C das coordenadas instrumentais é conhecida, será possível calcular a MV - C das coordenadas fiduciais por intermédio da relação (3.2.1.10). A expressão

$$P = \hat{\sigma}_0^2 \Sigma_Y^{-1} \quad (3.2.1.15)$$

permitirá obter a matriz dos pesos das coordenadas fiduciais; essa matriz não será diagonal, uma vez que existe dependência entre x e y.

Observe-se que, sendo conhecidos os valores de  $x_0$  e  $y_0$  (coordenadas do ponto principal em relação ao sistema fiducial), será possível referir as coordenadas dos pontos que participarão da aerotriangulação ao sistema de coordenadas fotográfico, com origem no ponto principal da fotografia. Assim, obedecidas as convenções para os sistemas de fotocoordenadas e a simbologia aqui adotadas, as coordenadas fotográficas de um ponto genérico j seriam dadas por  $(x_j - x_0, y_j - y_0)^7$ . A matriz dos pesos das coordenadas fotográficas é a mesma que para as coordenadas fiduciais, já calculada. Uma vez obtidas as coordenadas fotográficas e a matriz dos pesos, serão esses os elementos levados em consideração durante o restante do processo.

<sup>7</sup> Vide nota (9) de pé de página, item 3.2.1.a).

### 3.3 - DISTORÇÕES DAS LENTES

As imperfeições das imagens produzidas por lentes ou sistemas de lentes denominam-se aberrações e são classificadas em dois grupos: aberrações geométricas (aberração esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo e distorção ótica) e aberrações cromáticas. Com exceção da distorção ótica, todas as aberrações são defeitos não métricos, causando degradação na qualidade da imagem obtida, mas não alterando sua posição.

a) Distorção ótica (ou quinta aberração de Seidel ou distorção radial simétrica): um raio de luz, ao penetrar em um sistema de lentes, sofre uma série de refrações; a parcela não desejada da refração denomina-se distorção ótica. A distorção ótica caracteriza-se por provocar deslocamento radial e simétrico da imagem em relação ao ponto principal (PP) da fotografia.

Na figura 3.3.1 a imagem que deveria se formar em a, na verdade formou-se em a', devido à distorção ótica. Observe-se que:

- $\alpha$  = ângulo de incidência do raio luminoso;
- $\delta\alpha$  = desvio sofrido pelo raio luminoso devido à refração ótica;
- $\delta r$  = deslocamento radial sofrido pela imagem (distorção ótica);
- $f$  = distância focal (distância principal da câmara);
- $r$  = distância radial da imagem ao ponto principal (PP);
- $o$  = centro perspectivo.

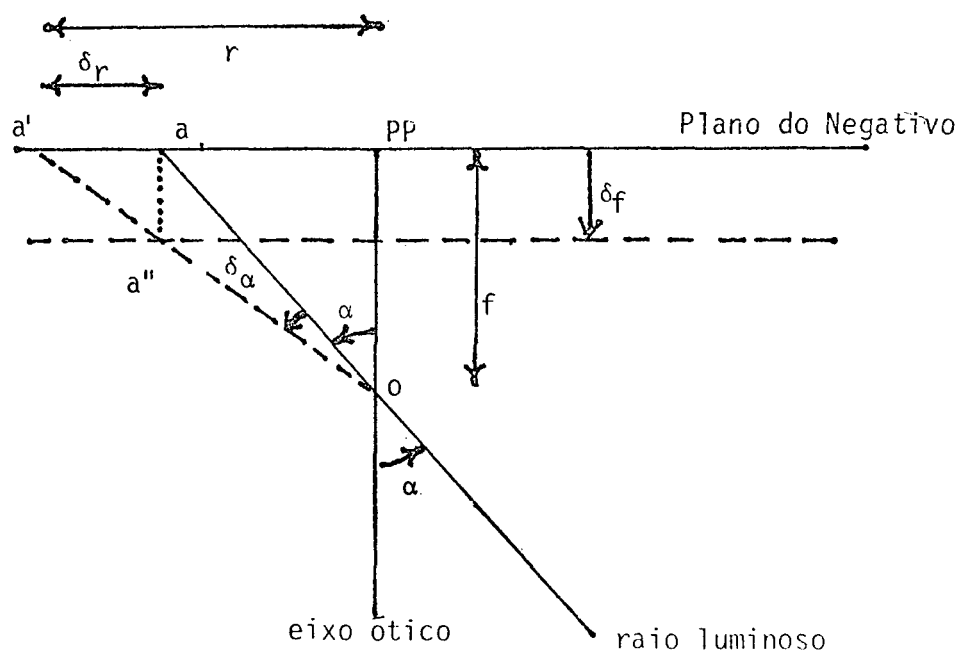


Fig. 3.3.1

Note-se que, se o plano do negativo for deslocado de uma distância  $\delta_f$  deixa de existir distorção radial ( $\delta_r=0$ );  $\delta_f$  é chamada distorção longitudinal.

Um modelo matemático visando descrever a distorção longitudinal foi desenvolvido por Conrady (Londres, 1919), a partir de três hipóteses [26]:

- a distorção longitudinal pode ser representada por uma função contínua;
- o raio axial (que coincide com o eixo ótico do sistema de lentes) não sofre desvio ao atravessar o sistema de lentes;
- o sinal da distorção longitudinal deve ser positivo para deslocamentos para fora da imagem.

Assim, um polinômio em  $r$  é capaz de representar a distorção longitudinal<sup>1</sup>:

$$\delta_f = a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + a_8 r^8 + \dots \quad (3.3.1)$$

A figura 3.3.1 permite escrever, com fundamento nos triângulos semelhantes  $O - PP' - a'$  e  $a - a' - a''$ :

$$\frac{\delta r}{\delta f} = \frac{r}{f} \dots$$

$$\delta_r = \frac{r}{f} (a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + a_8 r^8 + \dots) \quad (3.3.2)$$

Fazendo

$$\frac{a_{2i}}{f} = k_i, \quad i=1, 2, 3, \dots,$$

segue-se que

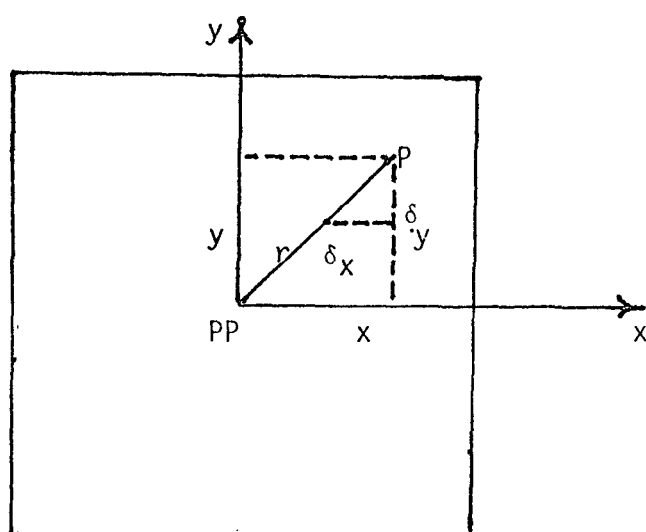
$$\delta r = k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + k_4 r^9 + \dots \quad (3.3.3)$$

A expressão (3.3.3) descreve a distorção ótica ou distorção radial simétrica; sua obtenção tornou claro que essa distorção é função do valor da distância focal.

<sup>1</sup> De acordo com a primeira hipótese, toma-se um polinômio em  $r$  para representar a distorção longitudinal; de acordo com a segunda hipótese,  $a_0=0$ ; de acordo com a terceira hipótese, não podem existir termos de expoente ímpar.

Na prática, determina-se o valor da distância focal que torna mínimo o valor da distorção ótica: isto é feito mediante o balanceamento dos máximos valores positivo e negativo da distorção ótica; a distância focal que iguala os valores absolutos da maior distorção negativa e da maior distorção positiva denomina-se distância focal calibrada [27]. A distância focal calibrada - valor que é efetivamente usado nos cálculos fotogramétricos - permite uma correção parcial dos efeitos da distorção ótica.

A distorção ótica é considerada em termos de suas componentes segundo os eixos cartesianos do sistema de coordenadas fotográficas. Os triângulos semelhantes da figura 3.3.2 permitem escrever:



$$\begin{aligned}\frac{\delta x}{x} &= \frac{\delta r}{r} \therefore \delta x = \frac{x}{r} \delta r \\ \frac{\delta y}{y} &= \frac{\delta r}{r} \therefore \delta y = \frac{y}{r} \delta r\end{aligned}\quad (3.3.4)$$

Fig. 3.3.2

Substituindo  $\delta r$  por sua expressão (3.3.3), obtêm-se as expressões das correções a aplicar às coordenadas fotográficas, em razão da distorção ótica:

$$\begin{aligned}\delta_x &= x (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8 + \dots) \\ \delta_y &= y (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + k_4 r^8 + \dots)\end{aligned}\quad (3.3.5)$$

Note-se que

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.3.6)$$



As coordenadas fotográficas, corrigidas da distorção ótica, serão:

$$\begin{aligned}x_c &= x - \delta_x \\y_c &= y - \delta_y\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

Os coeficientes da distorção ótica ( $k_1, k_2, k_3$ , etc) são fornecidos normalmente no certificado de calibração da câmara aérea, juntamente com o valor da distância focal calibrada, a localização do ponto principal e os parâmetros da distorção descentrada [28]; caso isto não o corra, poderão ser obtidos por meio do ajustamento da curva de distorção ótica pelo método dos mínimos quadrados<sup>2</sup>, uma vez que esses coeficientes definem a forma da curva.

Convencionalmente, a distorção radial é considerada positiva quando ocorre para fora do centro do campo e negativa em caso contrário [29].

Observou-se, experimentalmente, que [30]:

- o efeito da distorção ótica deve ser minimizado usando-se um polinômio de grau nove;
- o uso de polinômios de grau mais elevado não melhora os resultados;
- o polinômio de grau cinco não é adequado para correção da distorção ótica;
- os polinômios de grau três e sete possuem efeito similar na correção da distorção ótica.

b) Distorção descentrada: esse tipo de distorção ocorre devido ao não alinhamento dos eixos óticos das diversas lentes que compõem o sistema ótico da câmara aérea; não se trata, portanto, de um defeito característico de uma lente isolada e sim de um conjunto de lentes. A distorção descentrada apresenta uma componente radial (distorção radial) assimétrica

<sup>2</sup> *Caso também não se disponha da curva de distorção ótica, não poderá ser realizada correção analítica para esse tipo de erro sistemático, a menos que se utilize o processo da autocalibração.*

ca) e uma componente tangencial (distorção tangencial), perpendicular à primeira. O defeito pode ser reproduzido por um prisma delgado o qual, portanto, é capaz de eliminá-lo. Um modelo matemático para o prisma delgado foi desenvolvido por D.C. Brown e, posteriormente, por ele melhorado (1966), resultando as fórmulas de Conrady-Brown modificadas, as quais constituem atualmente o modelo mais geral para descrever a distorção des centrada de um sistema de lentes [31]:

$$\delta_x = [P_1 (r^2 + 2x^2) + 2 P_2 xy] [1 + P_3 r^2 + \dots] \quad (3.3.8)$$

$$\delta_y = [2 P_1 xy + P_2 (r^2 + 2y^2)] [1 + P_3 r^2 + \dots]$$

Os  $P_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) são parâmetros da distorção des cen trada, obtidos na calibração da câmara; os termos não lineares, a partir do termo  $P_3$ , etc, são negligenciados, ficando as expressões (3.3.8) reduzidas aos termos em  $P_1$  e  $P_2$ ; da mesma forma que antes,

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

sendo  $x$  e  $y$  as coordenadas fotográficas da imagem, depurado o efeito cau sado pela distorção ótica. As coordenadas fotográficas corrigidas da dis torção descentrada serão:

$$\begin{aligned} x_c &= x - \delta_x \\ y_c &= y - \delta_y \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Resultados de testes de campo mostraram que o efeito da distorção descentrada é insignificante [32], o que explica porque algu mas vezes não é levado em consideração.

Os parâmetros "P" surgiram como resultado de agrupamento de parâmetros; caso não sejam fornecidos diretamente no certificado de calibração da câmara, podem ser obtidos usando-se as expressões abaixo [33], desde que disponíveis os parâmetros  $j_1$ ,  $j_2$  e  $\phi_0$  do modelo matemáti co do prisma delgado.

$$P_1 = -j_1 \sin \phi_0$$

$$P_2 = j_1 \cos \phi_0$$

### 3.4 - REFRAÇÃO FOTOGRAFÊMTRICA

Devido à variação contínua do índice de refração atmosférica, o raio luminoso, ao percorrer sua trajetória na atmosfera, sofre um encurvamento, afastando-se da condição ideal descrita pela equação de colinearidade; em razão disso, a imagem de um ponto  $P$  do terreno, no plano do negativo não se forma em  $p$  e sim em  $p'$  (vide figura 3.4.1). Uma vez que ocorreu deslocamento das imagens para fora de suas posições corretas, radialmente em relação ao ponto principal, haverá necessidade de aplicar correções às coordenadas fotográficas dessas imagens. No caso da figura 3.4.1 tem-se:

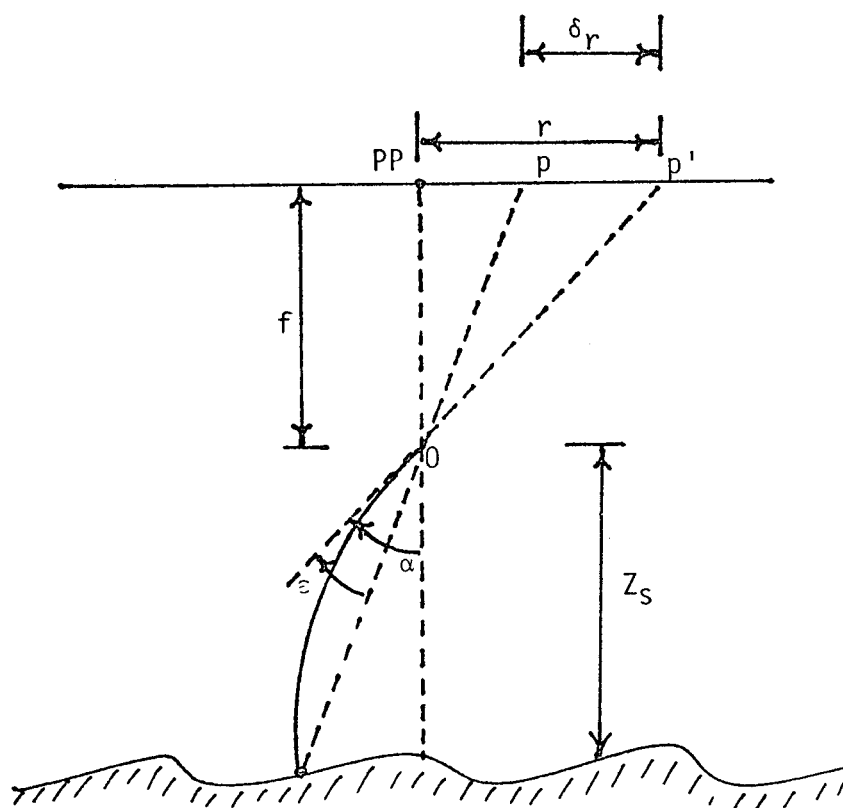


Fig. 3.4.1

$f$  = distância focal da câmara aérea;

$Z_s$  = altura de vôo;

$\epsilon$  = refração fotogramétrica: ângulo entre a trajetória reta e a tangente à trajetória curva do raio de luz, medido no nodo exterior e tomado como positivo para deslocamentos da imagem afastando-se da imagem do ponto nadir;

$\alpha$  = ângulo nadir: ângulo entre a tangente ao raio de luz real (i.e., curvo) e a vertical que passa pelo centro perspectivo, medido no centro perspectivo;

$r$  = afastamento radial da imagem em relação ao ponto principal (PP).

Seja a figura 3.4.2, na qual a superfície dióptica A separa dois ambientes de índices de refração  $n$  e  $n+dn$ , respectivamente; ao incidir na superfície, o raio de luz sofre um desvio  $d\theta$  aproximando-se da normal à superfície dióptica (por hipótese  $n + dn > n$ );  $d\theta$ , portanto, corresponde à refração ocorrida. De acordo com a lei de Snell, pode-se escrever [34]:

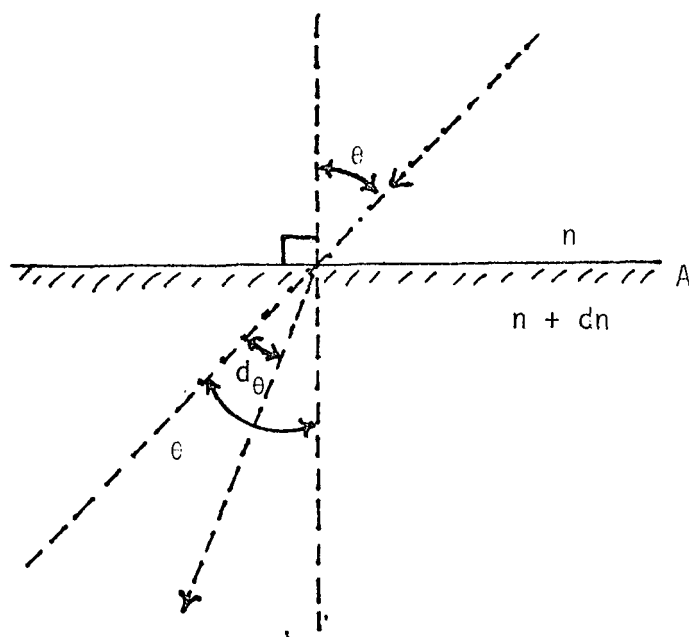


Fig. 3.4.2

$$\frac{n + dn}{n} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\theta - d\theta)} \quad .\quad .$$

$$n \text{ sen } \theta = (n + dn) \text{ sen } (\theta - d\theta) \quad .\quad .$$

$$n \text{ sen } \theta = (n + dn)(\text{sen}\theta \cos d\theta - \text{sen } d\theta \cos \theta) \quad .\quad .$$

$$n \text{ sen } \theta = n(\text{sen}\theta \cos d\theta - \text{sen } d\theta \cos \theta) + dn \text{ sen}\theta \cos d\theta - dn \text{ sen } d\theta \cos \theta$$

Uma vez que  $d\theta$  é um ângulo muito pequeno, podemos assu  
mir:

$$\cos d\theta = 1$$

$$\sin d\theta = d\theta \quad (\text{em radianos}).$$

Assim:

$$n \sin \theta = n \sin \theta - n \cos \theta d\theta + \sin \theta dn - \cos \theta dn d\theta$$

O último termo da expressão acima pode ser negligenciado, por se tratar de produto de infinitesimos; dessa forma:

$$0 = -n \cos \theta d\theta + \sin \theta dn \quad \therefore$$

$$n \cos \theta d\theta = \sin \theta dn \quad \therefore$$

$$d\theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{dn}{n}$$

$$d\theta = \operatorname{tg} \theta \frac{dn}{n} \quad (3.4.1)$$

A expressão (3.4.1) é chamada de equação diferencial da refração atmosférica. Caso fosse conhecida perfeitamente a variação de  $d\theta$  com  $n$  (índice de refração), a (3.4.1) poderia ser integrada; como isto não ocorre, são estabelecidos modelos matemáticos fixando a variação da densidade atmosférica com a altitude, os quais constituem, na verdade, simplificações do problema real<sup>1</sup>.

Considere-se a figura 3.4.3: um raio de luz oriundo do ponto S ao atingir a superfície diótrica sofre uma refração e vai ter ao ponto P. A figura permite observar que a um  $d\theta$  (refração atmosférica) corresponde um  $d\alpha$  (refração fotogramétrica).

Em razão de os arcos com vértice em S e S' serem quase iguais, é possível considerá-los iguais e escrever:

<sup>1</sup> É aqui considerada a "United States Standard Atmosphere of 1962" (USSA-1962); fórmulas e tabelas relativas a essa atmosfera-padrão podem ser encontradas na publicação da referência bibliográfica 26. Observar que, dentro dos limites da tropopausa não se notam diferenças entre esse e outros modelos para a atmosfera.

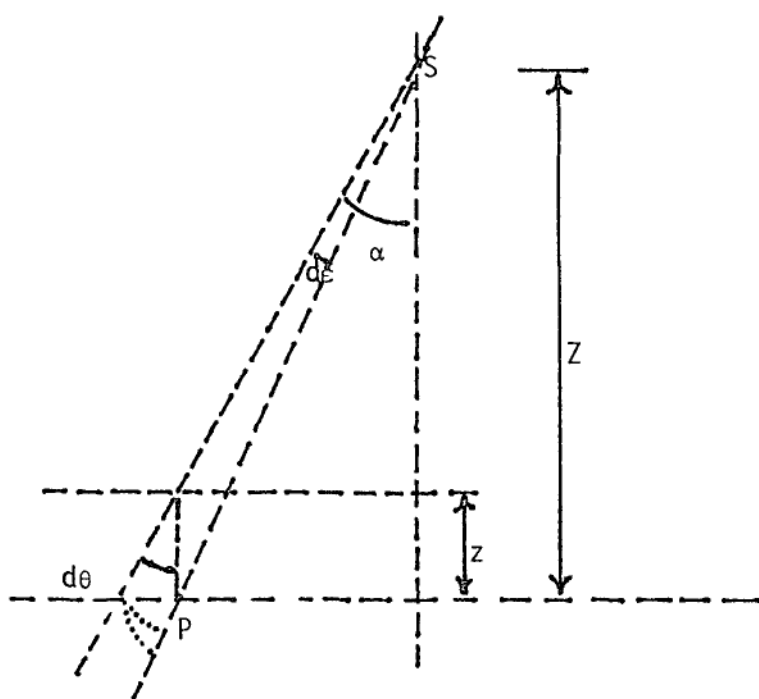


Fig. 3.4.3

$$\frac{Z}{\cos \alpha} d\epsilon = \frac{z}{\cos \alpha} d\theta \quad \therefore$$

$$d\epsilon = \frac{z}{Z} d\theta$$

Substituindo a (3.4.1) na expressão acima, vem

$$d\epsilon = \frac{z}{Z} \operatorname{tg} \theta \frac{dn}{n} \quad , \quad (3.4.2)'$$

A (3.4.2) é chamada equação diferencial da refração fotogramétrica. A integração dessa equação diferencial fornecerá a expressão da refração fotogramétrica, a qual permite a substituição da atmosfera real por uma atmosfera padronizada, possuindo uma única superfície diótrica, a qual está situada na interseção das tangentes extremas ao raio de luz;  $z$  será a altura do centro de massa da superfície diótrica hipotética

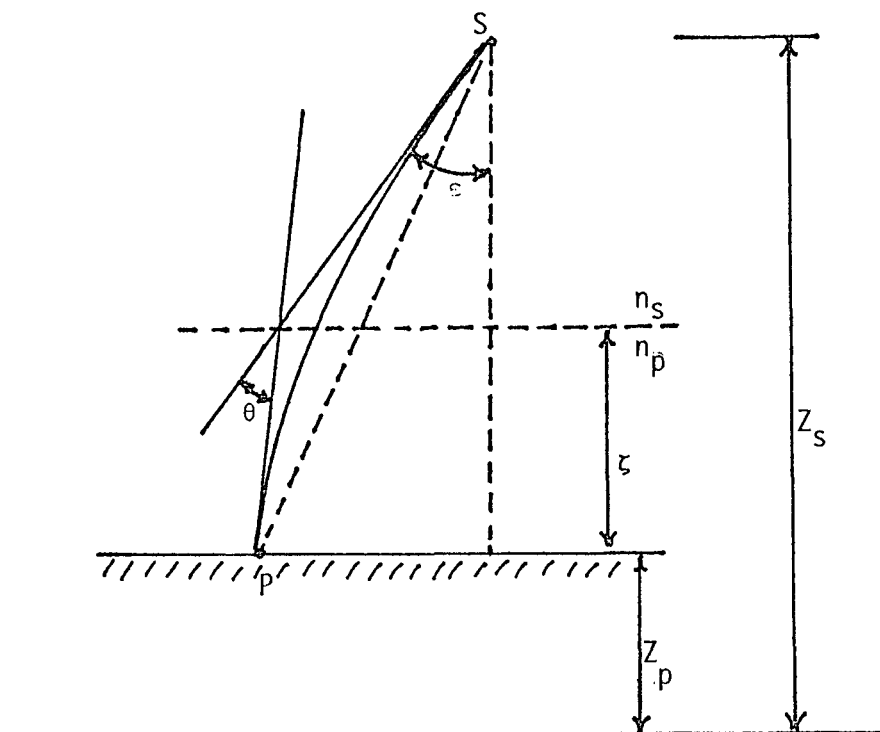


Fig. 3.4.4

e única que substitui as infinitas superfícies atravessadas pelo raio de luz (vide figura 3.4.4).

$$\epsilon = \frac{\zeta}{Z_s - Z_p} \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{n_p}{n_s} \quad (3.4.3)$$

Observe-se que, se  $\alpha = 45^\circ$ , a (3.4.3) se torna

$$\epsilon_{45} = \frac{\zeta}{Z_s - Z_p} \ln \frac{n_p}{n_s},$$

o que permite escrever:

$$\epsilon = \epsilon_{45} \operatorname{tg} \alpha \quad (3.4.4)$$

Na verdade, necessitamos das correções que devem ser aplicadas às coordenadas fotográficas  $x$  e  $y$ , já isentas dos erros devidos às deformações do filme e à distorção ótica [35]. Observe-se - figura 3.4.5 - que uma variação infinitesimal  $d\alpha$  no ângulo nadir provoca um deslocamento infinitesimal  $dr$  na imagem. Da figura:

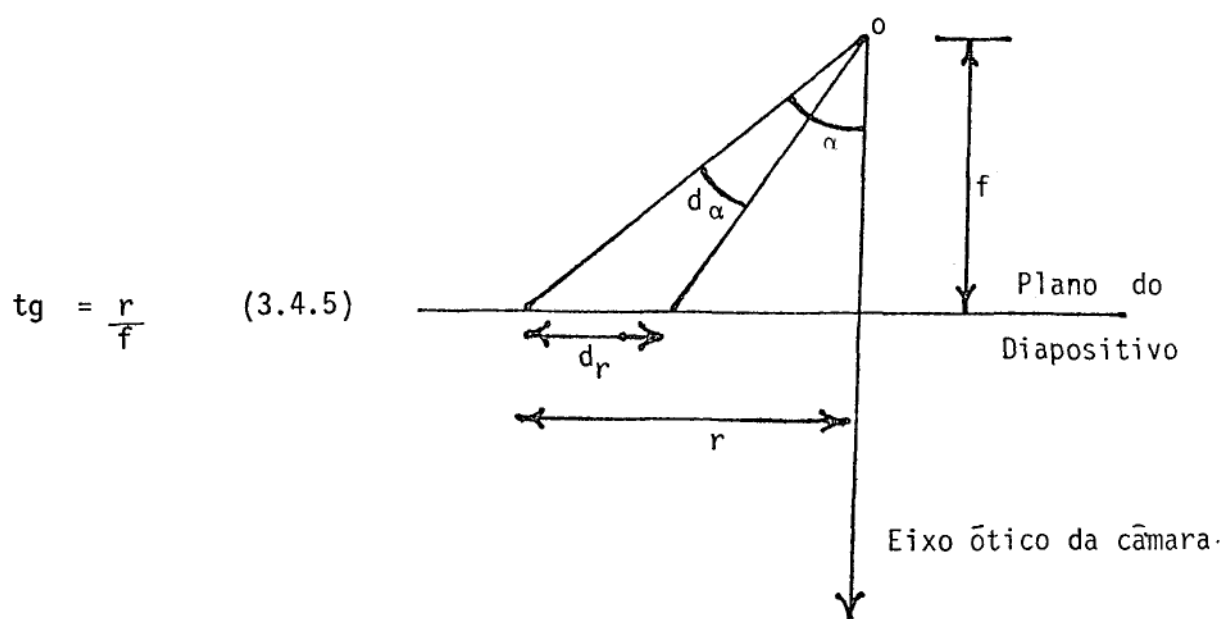


Fig. 3.4.5

onde

$\alpha$  = ângulo nadir;

$r$  = distância radial da imagem ao ponto principal;

$f$  = distância focal da câmara aérea;

$O$  = centro perspectivo.

Da expressão (3.4.5)...

$$r = f \text{tg } \alpha$$

Diferenciando...

$$dr = f \sec^2 \alpha \, d\alpha \quad (3.4.6)$$

No entanto,

$$\sec^2 \alpha = \text{tg}^2 \alpha + 1 \quad \therefore$$

$$\sec^2 \alpha = \frac{r^2}{f^2} + 1 \quad \therefore$$

$$\sec^2 \alpha = \frac{f^2 + r^2}{f^2} \quad (3.4.7)$$

Substituindo na (3.4.6)...

$$dr = f \frac{f^2 + r^2}{f^2} \, d\alpha$$



Integrando a expressão acima, visando obter o deslocamento finito  $\delta r$  ...<sup>1a</sup>

$$\delta r = f \frac{f^2 + r^2}{f^2} \int_0^\epsilon d\alpha \quad \therefore$$

$$\delta r = f \frac{f^2 + r^2}{f^2} \epsilon$$

Mas

$$\epsilon = \epsilon_{45} \operatorname{tg} \alpha = \epsilon_{45} \frac{r}{f}$$

Substituindo ...

$$\delta r = f \frac{f^2 + r^2}{f^2} \epsilon_{45} \frac{r}{f} \quad \therefore$$

$$\delta r = \epsilon_{45} \left( \frac{r^3}{f^2} + r \right) \quad (3.4.8)$$

A expressão (3.4.8) informa o deslocamento sofrido pela i magem em função de  $\epsilon_{45}$  (refração fotogramétrica para  $\alpha=45^\circ$ ),  $r$  e  $f$ ; esse deslocamento terá como componente  $\delta x$  e  $\delta y$ , respectivamente, ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  [35]. Da figura 3.4.6:

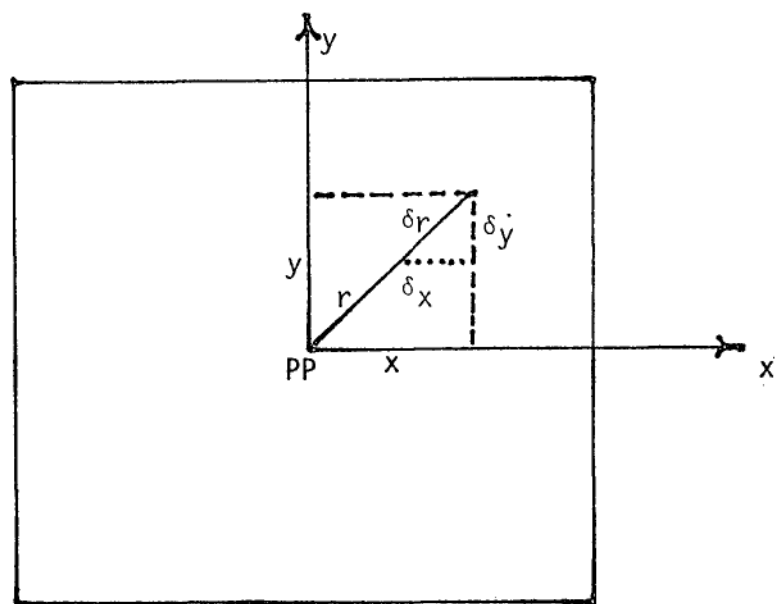


Fig. 3.4.6

<sup>1a</sup> Para maior simplicidade, assumiu-se  $r$  constante.

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta r}{r} \quad (3.4.9)$$

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta r}{r}$$

Substituindo  $\delta r$  por sua expressão (3.4.8) e operando, vem:

$$\delta x = x \left( \frac{r^2}{f^2} + 1 \right) \epsilon_{45} \quad (3.4.10)$$

$$\delta y = y \left( \frac{r^2}{f^2} + 1 \right) \epsilon_{45}$$

onde

$$r^2 = x^2 + y^2$$

As coordenadas corrigidas serão:

$$\begin{aligned} x_c &= x - \delta x \\ y_c &= y - \delta y \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$\epsilon_{45}$  pode ser calculado pela fórmula aproximada de Saastamoinen para a USSA-1962<sup>2</sup>:

$$\epsilon_{45} = 13 (Z_S - Z_p) [1 - 0,02 (2 Z_S + Z_p)] 10^{-6} \quad (3.4.12)$$

Onde:

$\epsilon_{45}$  = refração fotogramétrica para  $\alpha = 45^\circ$ , em radianos;

$Z_S$  = altitude de vôo, em quilômetros;

$Z_p$  = altitude média do terreno, em quilômetros.

<sup>2</sup> Essa fórmula foi testada e, dentro dos limites da tropopausa, não produz diferenças maiores que um micron para as correções  $\delta_x$  e  $\delta_y$  a aplicar às coordenadas fotográficas, tomando como referência expressões mais complexas disponíveis na literatura consultada.

## CAPÍTULO 4 - AEROTRIANGULAÇÃO E AJUSTAMENTO: SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ)

- 4.1 - Apresentação do problema;
- 4.2 - Descrição do processo: ajustamento dos feixes perspectivos do bloco de fotografias usando o M.M.Q. (método paramétrico)
- 4.3 - Obtenção dos valores aproximados dos parâmetros;
- 4.4 - Derivadas envolvidas;
- 4.5 - Macro-fluxograma do processo;
- 4.6 - Conclusões e Recomendações.

#### 4.1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

No capítulo 2 foi obtido o modelo matemático da aerotriangulação analítica, calcado na condição de colinearidade:

$$x = f \frac{m_{11} (X - X_0) + m_{12} (Y - Y_0) + m_{13} (Z - Z_0)}{m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)} \quad (= F_x) \quad (2.2.3)$$

$$y = f \frac{m_{21} (X - X_0) + m_{22} (Y - Y_0) + m_{23} (Z - Z_0)}{m_{31} (X - X_0) + m_{32} (Y - Y_0) + m_{33} (Z - Z_0)} \quad (= F_y)$$

sendo:

(x, y) = coordenadas fotográficas do ponto-imagem; convém lembrar que o aerotriangulador (ou o equipamento que vier a ser utilizado) fornece coordenadas instrumentais, as quais são transformadas em coordenadas fiduciais e daí, com o conhecimento das coordenadas fiduciais do ponto principal, é possível passar para coordenadas fotográficas; naturalmente, esta transformação terá de ser realizada antes que se possa utilizar o modelo, tal como representado pelas (2.2.3). No caso da atual configuração disponível na Diretoria de Hidrografia e Navegação, essas coordenadas serão medidas em milímetros usando-se o WILD A-9. Observe-se, ainda, que as coordenadas fotográficas deverão estar depuradas dos erros sistemáticos;

f = distância principal (ou focal) da câmara aérea utilizada na obtenção da fotografia, em milímetros<sup>1</sup>. Para o enfoque aqui adotado, o valor de f corresponde ao obtido na calibração da câmara aérea. Observe-se que f é positivo nas (2.2.3) porque essas expressões foram obtidas a partir do negativo (vide figura 2.2.1, na qual f acompanha a orientação positiva do eixo dos z do sistema fotogramétrico); quando se usa o diapositivo (como no caso do autógrafo WILD A-9 e outros equipamentos), f terá

<sup>1</sup> Na verdade, f deverá estar expresso na mesma unidade que as coordenadas fotográficas.

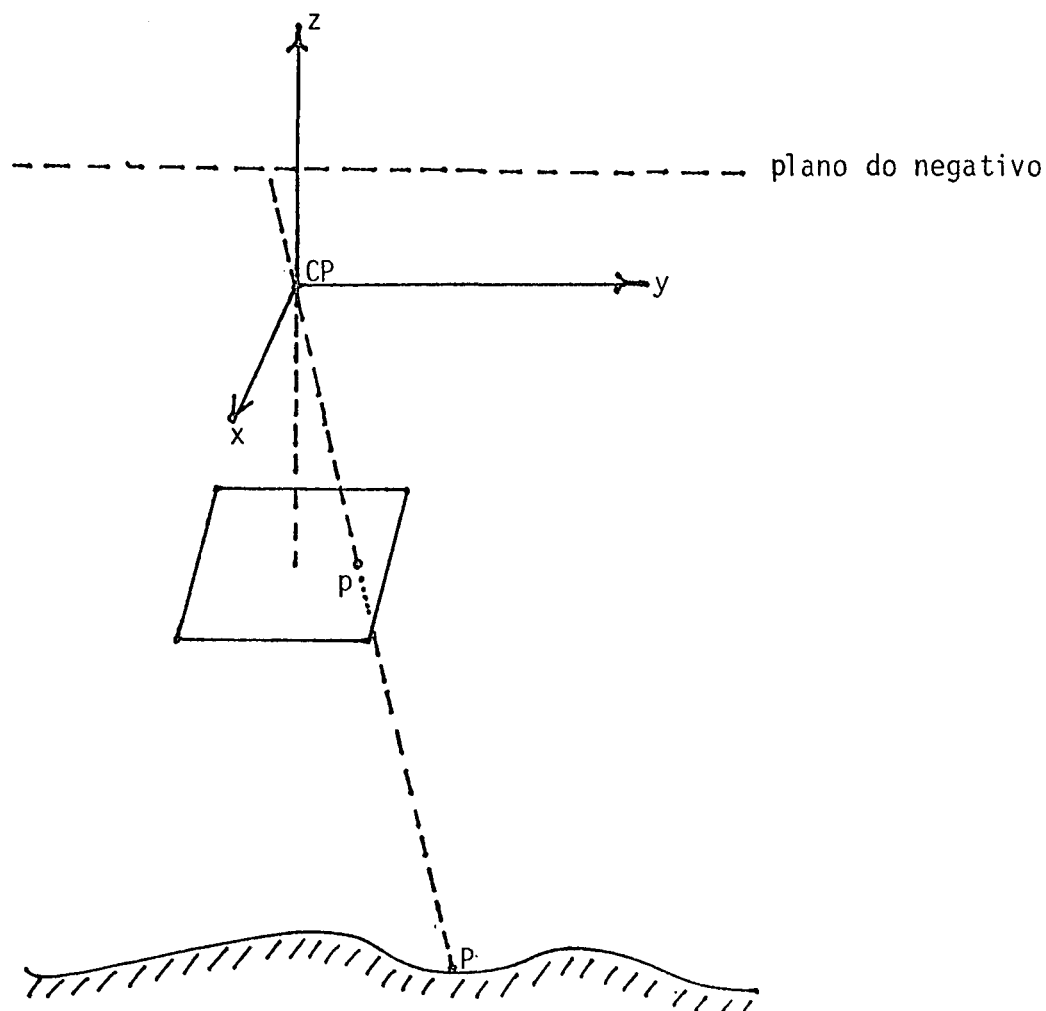


Figura 4.1.1

valor negativo (vide figura 4.1.1).

$(X, Y, Z)$  = coordenadas geodésicas locais dos pontos do terreno que participarão da aerotriangulação; os pontos de apoio à aerotriangulação, os quais possuem coordenadas de terreno determinadas, possivelmente em um sistema elipsóidico, terão essas coordenadas passadas para o sistema geodésico local; assim, os demais pontos aerotriangulados terão - após concluído o processo - suas coordenadas calculadas no sistema geodésico local estabelecido, sendo essas coordenadas passadas para o sistema original utilizado.

$(X_0, Y_0, Z_0)$  = coordenadas geodésicas locais do centro perspectivo; serão determinadas durante o processo;

$m_{ij}$  = elementos da matriz de rotação  $M = M_{\omega} M_{\phi} M_k$  (vide capítulo 2); os ângulos de rotação  $\omega$ ,  $\phi$  e  $k$  serão também obtidos como resultado do processo.

Uma vez determinado os valores de  $(X_0, Y_0, Z_0)$  e  $\omega$ ,  $\phi$  e  $k$ , será possível, a partir das coordenadas fotográficas dos pontos imageados, obter suas coordenadas geodésicas locais e, a partir daí, as coordenadas elipsóidicas desses pontos.

Existem várias alternativas para conduzir uma aerotriangulação e para ajustar os valores obtidos, visando torná-los os "valores mais prováveis". O caminho aqui escolhido é inteiramente computacional: inexiste formação de modelos ou de faixas (nem mesmo analiticamente); o que é feito, na verdade é um ajustamento em bloco (por feixe)<sup>2</sup>, o qual permite a obtenção simultânea dos parâmetros envolvidos. O bloco deve consistir em faixas paralelas ao litoral de modo a mostrar a linha da costa e os acidentes que acompanham o litoral; no caso de ilhas ou outros acidentes isolados, poderão ser realizadas faixas transversais, até obter súperposição com a(s) faixa(s) paralela(s) ao litoral, desde que entre os acidentes em questão e o litoral não exista modelo inteiramente na água. O processo permite que a aerotriangulação e o ajustamento sejam realizados ao mesmo tempo para todo o bloco de fotografias, uma vez que é calcado no ajuste simultâneo de todos os feixes perspectivos de todas as estações de exposição para todos os pontos que participam da aerotriangulação, assim como também é realizada - simultaneamente - a recomposição dos elementos de orientação externa das fotografias. Em tese, tal processo é considerado a mais rigorosa forma de ajustamento, uma vez que inexiste propagação de erros; seu inconveniente é a capacidade de armazenamento do equipamento de P.D. utilizado, fator que não é considerado tão crítico aqui<sup>3</sup>. Assim, um ajustamento em bloco é considerado factível, desde que se possua alguma capacidade de processamento; tal ajustamento será realizado utilizando as equações de colinearidade (2.2.3), as

<sup>2</sup> *Block bundle adjustment.*

<sup>3</sup> *No caso da cartografia náutica a D.H.N., utiliza, normalmente, esca*las de foto da ordem de 1:40 000. A cobertura da costa é obtida, *não* raras vezes, com apenas uma faixa de vôo, comumente com duas ou *três* faixas e, excepcionalmente, com um número maior de faixas; além disso, o número de pontos a *participar* da *aero*triangulação, normalmente é *me*nor que no caso de aplicações voltadas para a cartografia *térrestre*, uma vez que a *idéia* não é saturar a carta náutica com detalhes *topográ*ficos e *sim* representar aqueles que possuam relevância para o *navegan*te ou que contribuam para acentuar o aspecto *sócio-econômico* da *carta* náutica, além de possibilitar a *restituição* *fotogramétrica*.

quais constituem as "equações de observação" para o caso; deve-se contar, ainda, com superabundância de informações: qualquer forma de ajustamento exige um número mínimo de pontos determinados no terreno (pontos de apoio ou de controle), adequadamente distribuídos pelas faixas e com suas imagens nas fotografias identificadas além de qualquer dúvida. A finalidade do ajustamento é permitir uma compensação dos erros ocorridos na aerotriangulação, fazendo com que os valores finais dos parâmetros sejam os mais prováveis. Deve-se ter em mente que a densificação geodésica de 3ª ordem permitida pelo processo exigirá a determinação de pontos de apoio no terreno, por processos geodésicos ou topográficos, ao nível de 2ª ordem.

#### 4.2 - DESCRIÇÃO DO PROCESSO: AJUSTAMENTO DOS FEIXES PERSPECTIVOS DO BLOCO DE FOTOGRAFIAS USANDO O M.M.Q. (MÉTODO PARAMÉTRICO)

O ajustamento em bloco pode ser feito usando-se injunções absolutas ou injunções relativas (ou de peso); a finalidade dessas últimas é impedir que a incerteza acerca dos valores tomados como ponto de partida se propague diretamente aos resultados do ajustamento; por outro lado, permitem uma maior flexibilidade, já que o sistema geodésico local adotado pode ser fixado por meio de observações de ângulos, distâncias, altitudes, etc... Como acentuado no capítulo 2, item 2.2, tais observações ocorrem em trabalhos de levantamento hidrográfico; no entanto, sua frequência é baixa. Nessas condições, pareceu razoável a opção pelas injunções absolutas, evitando sobrecarregar o código desenvolvido com instruções, desvios e alternativas que raramente virão a ser executados. Assim, as coordenadas dos pontos de apoio, determinadas no terreno por métodos de campo, constituirão as injunções absolutas e fixarão o sistema geodésico local adotado.

O método paramétrico de ajustamento<sup>4</sup> é utilizado quando os valores observados ajustados constituem função explícita dos parâmetros ajustados; um modelo matemático - no caso em estudo as equações de

<sup>4</sup> Já apresentado no capítulo 3, item 3.2.

colinearidade (2.2.3)<sup>5</sup> - faz a ligação entre os valores observados e os parâmetros. O modelo matemático do método paramétrico, como resultado de sua definição, obedece à forma [20]:

$$L_a = F(X_a) \quad (3.2.1.1)$$

└───┬───┘ parâmetros ajustados  
└──────────┘ valores observados ajustados

A aplicação da fórmula de Taylor, linearizada<sup>6</sup>, à expressão (3.2.1.1) permite a obtenção do modelo matemático linearizado do método paramétrico:

$$AX + L = V \quad , \quad (3.2.1.3)$$

cuja solução, obtida aplicando-se a condição de mínimos quadrados ( $V^T P V = \text{mínimo}$ ) será [22]:

$$X = - (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad , \quad (3.2.1.4)$$

sendo:

$$A = \left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0} \quad , \text{ a matriz das derivadas do modelo matemático (as equa}$$

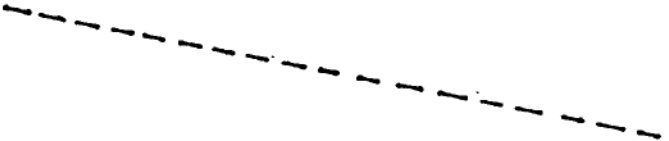
ções de observações, na verdade) em relação aos parâmetros, tomada no ponto  $X_0$ , correspondente aos valores iniciais (ou aproximados) desses parâmetros. A matriz A será de dimensões  $n \times u$ , em que  $n$  é o número de observações e  $u$  o número de parâmetros<sup>7</sup>; o aspecto genérico dessa matriz é apresentado a seguir:

<sup>5</sup> As observações são constituídas pelas coordenadas fotográficas ( $x, y$ ) - isentas de erros sistemáticos - dos pontos imageados, medidas em um comparador ou aerotriangulador, enquanto os parâmetros são de dois tipos: aqueles relativos aos elementos de orientação externa de cada fotografia (refletindo os seis graus de liberdade de cada feixe:  $X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi$  e  $k$ ) e aqueles que definem as coordenadas ( $X, Y, Z$ ) dos pontos do terreno que se deseja conhecer.

<sup>6</sup> Vide capítulo 3, item 3.2.

<sup>7</sup>  $n = \Sigma$  dos pontos de cada foto cujas coordenadas fotográficas ( $x, y$ ) foram obtidas  $\times 2$ , isto é, número de pontos-imagem  $\times 2$ ;  
 $u = \text{número de parâmetros de orientação externa} + \text{número de parâmetros relativos aos pontos do espaço-objeto} = \text{número de fotos} \times 6 + \text{número de pontos cujas coordenadas geodésicas } (X, Y, Z) \text{ se deseja determinar} \times 3$ .



DERIVADAS EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS DE ORIENTAÇÃO EXTERNA														DERIVADAS EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS DO ESPAÇO-OBJETO									
A=	$\frac{\partial x}{\partial X_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial x}{\partial \omega}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$	$\frac{\partial x}{\partial k}$	.....	$\frac{\partial x}{\partial X_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial x}{\partial \omega}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$	$\frac{\partial x}{\partial k}$	$\frac{\partial x}{\partial X}$	$\frac{\partial x}{\partial Y}$	$\frac{\partial x}{\partial Z}$	.....	$\frac{\partial x}{\partial X}$	$\frac{\partial x}{\partial Y}$	$\frac{\partial x}{\partial Z}$	1º PONTO IMAGEADO DA 1ª FOTO		
	$\frac{\partial y}{\partial X_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial y}{\partial \omega}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$	$\frac{\partial y}{\partial k}$	.....	$\frac{\partial y}{\partial X_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial y}{\partial \omega}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$	$\frac{\partial y}{\partial k}$	$\frac{\partial y}{\partial X}$	$\frac{\partial y}{\partial Y}$	$\frac{\partial y}{\partial Z}$	.....	$\frac{\partial y}{\partial X}$	$\frac{\partial y}{\partial Y}$	$\frac{\partial y}{\partial Z}$			
														$\frac{\partial x}{\partial X}$	$\frac{\partial x}{\partial Y}$	$\frac{\partial x}{\partial Z}$	.....	$\frac{\partial x}{\partial X}$	$\frac{\partial x}{\partial Y}$	$\frac{\partial x}{\partial Z}$	ÚLTIMO PONTO IMAGEADO DA ÚLTIMA FOTO		
	$\frac{\partial x}{\partial X_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial x}{\partial \omega}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$	$\frac{\partial x}{\partial k}$	.....	$\frac{\partial x}{\partial X_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial x}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial x}{\partial \omega}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$	$\frac{\partial x}{\partial k}$	$\frac{\partial x}{\partial X}$	$\frac{\partial x}{\partial Y}$	$\frac{\partial x}{\partial Z}$	.....	$\frac{\partial x}{\partial X}$	$\frac{\partial x}{\partial Y}$	$\frac{\partial x}{\partial Z}$			
	$\frac{\partial y}{\partial X_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial y}{\partial \omega}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$	$\frac{\partial y}{\partial k}$	.....	$\frac{\partial y}{\partial X_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Y_0}$	$\frac{\partial y}{\partial Z_0}$	$\frac{\partial y}{\partial \omega}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$	$\frac{\partial y}{\partial k}$	$\frac{\partial y}{\partial X}$	$\frac{\partial y}{\partial Y}$	$\frac{\partial y}{\partial Z}$	.....	$\frac{\partial y}{\partial X}$	$\frac{\partial y}{\partial Y}$	$\frac{\partial y}{\partial Z}$			
	$\xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$							$\xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$						$\xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$				$\xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$			$\xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$		
	1ª FOTO							ÚLTIMA FOTO						1º PONTO				ÚLTIMO PONTO					

As expressões das derivadas do modelo em relação aos parâmetros de orientação externa e em relação aos parâmetros relativos ao espaço-objeto são mostradas no item 4.4 do presente capítulo.

Unicamente como exemplo, visando permitir uma melhor visualização, admitimos um bloco composto de uma faixa constituída por três fotografias, como na figura 4.2.1:

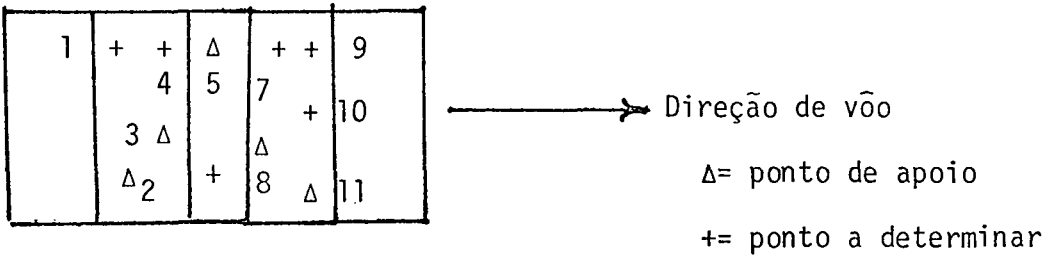


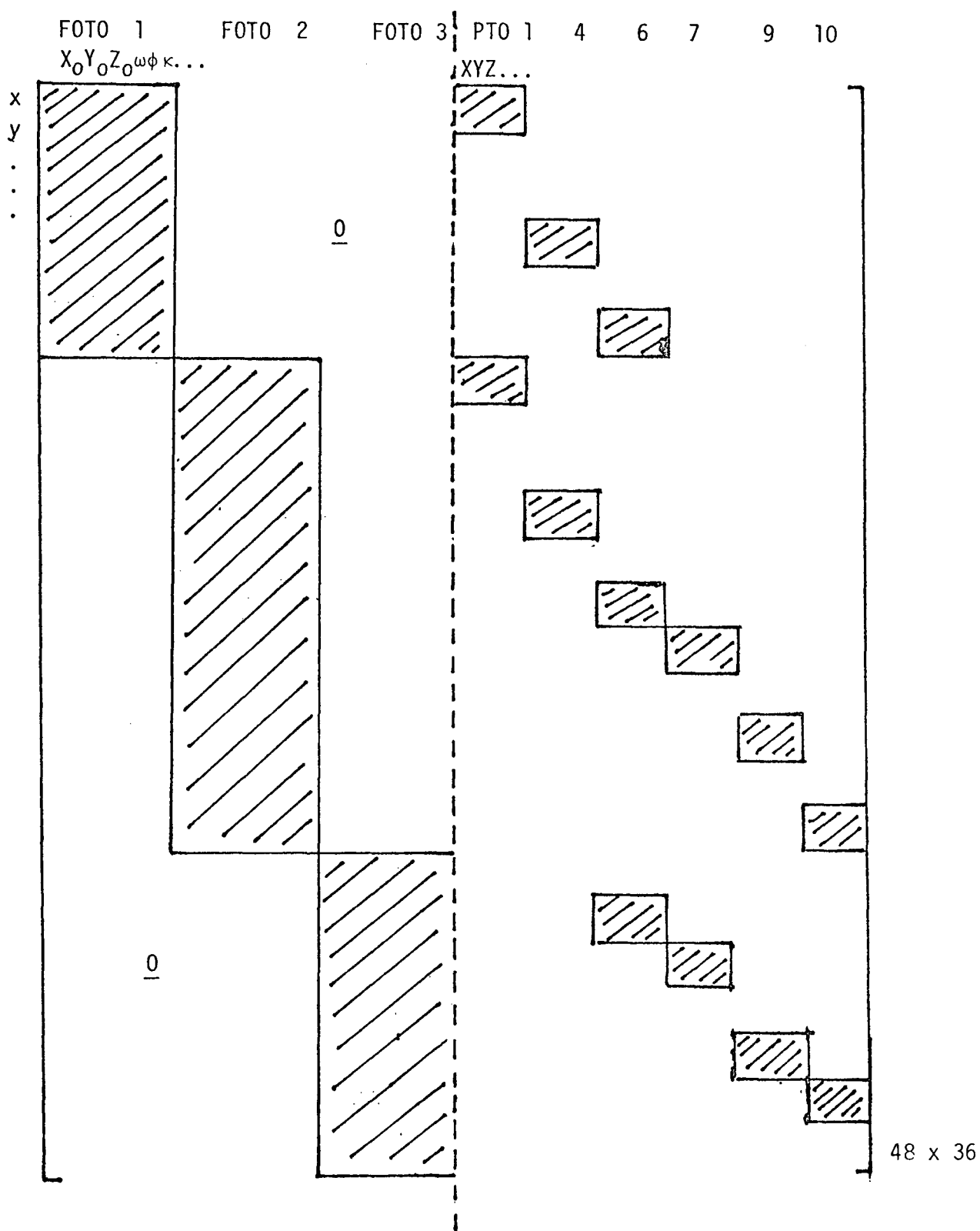
Fig. 4.2.1

Sendo  $\underline{n}$  o número de observações e  $\underline{u}$  o número de parâmetros, tem-se que:

$$n = 6 \times 2 + 11 \times 2 + 7 \times 2 = 48$$

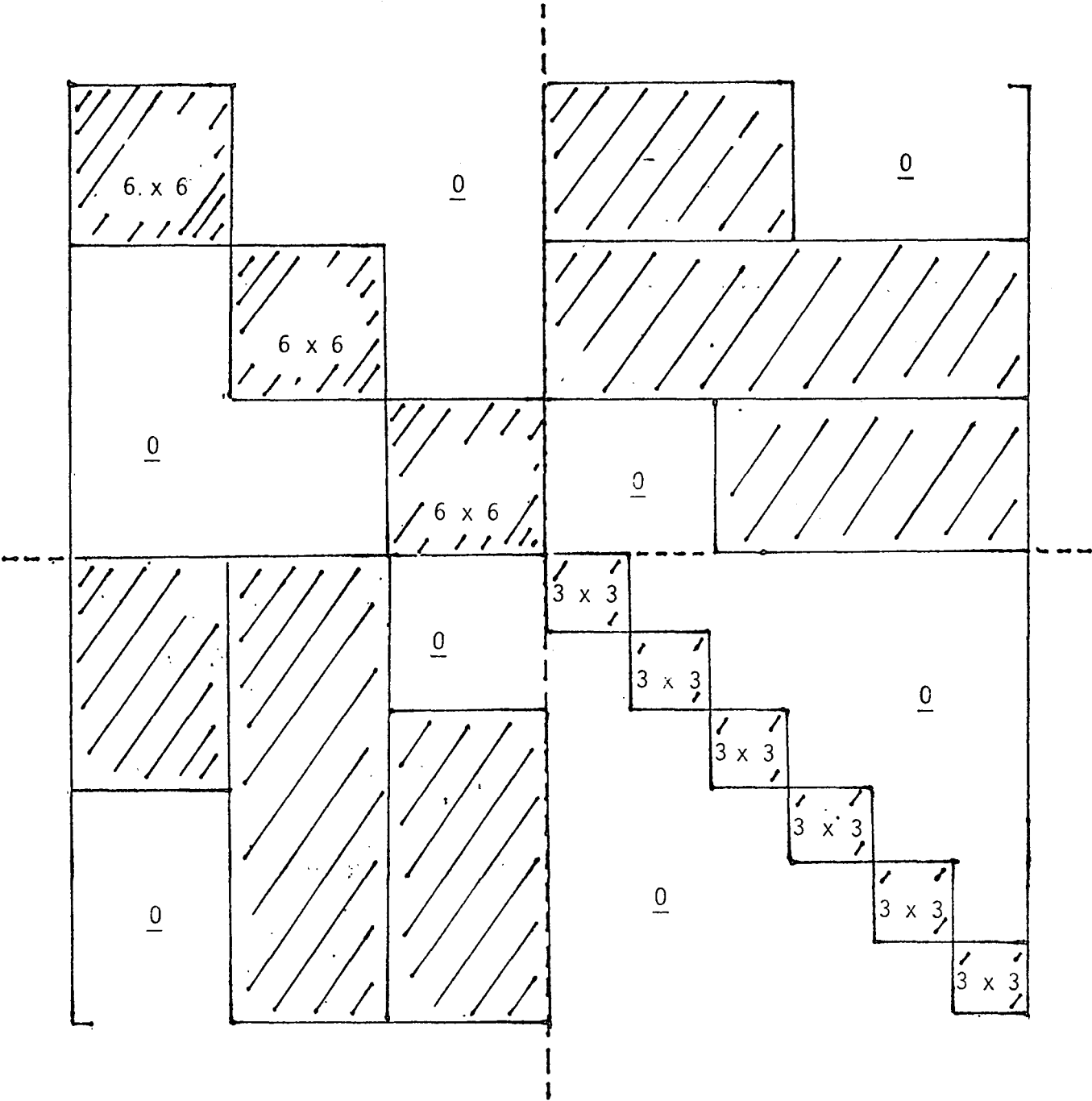
$$u = 6 \times 3 + 6 \times 3 = 36$$

Para o caso, o grau de liberdade será  $n-u=12$ ; existe superabundância de observações e, como resultado, existe possibilidade de solução pelo método dos mínimos quadrados. O aspecto da matriz A, para o exemplo mostrado, será:



Nesse caso, o aspecto da matriz  $A^T A$  (que possui o mesmo aspecto que  $A^T P A$ ) será:

$$N=A^T P A =$$



Se considerarmos  $N = A^T P A$ , matriz dos coeficientes das equações normais, como formada por quatro matrizes (Fig. 4.2.2) percebe-se que:

$$N = \left[ \begin{array}{c|c} N_{11} & N_{12} \\ \hline N_{21} & N_{22} \end{array} \right]$$

Fig. 4.2.2

-  $N_{11}$  é uma matriz bloco-diagonal constituída por submatrizes de dimensões  $6 \times 6$ ;

-  $N_{22}$  é uma matriz bloco-diagonal constituída por submatrizes de dimensões  $3 \times 3$ ;

-  $N_{21}$  é a transposta da matriz  $N_{12}$ .

Tais características tornam atraente o particionamento da matriz  $N$ , visando a obtenção de sua inversa, necessária à solução do problema; esse particionamento virá permitir uma ocupação menos extensiva de memória de computador.

$X$  = vetor das correções, de dimensões  $u \times 1$ ;

$X_a$  = vetor dos parâmetros ajustados ( $u \times 1$ );

$X_0$  = vetor dos parâmetros aproximados ( $u \times 1$ )<sup>8</sup>.

Assim:

$$X_a = X_0 + X$$

<sup>8</sup> O item 4.3 trata da estimativa inicial desses valores:

$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \phi \\ k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \phi \\ k \\ X \\ Y \\ Z \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$	<p style="text-align: center;">↑</p> <p style="text-align: center;">Parâmetros de orientação externa da 1ª foto</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">↑</p> <p style="text-align: center;">Parâmetros de orientação externa da última foto</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">↑</p> <p style="text-align: center;">Coordenadas geodésicas locais do 1º ponto do espaço objeto a ser calculado</p> <p style="text-align: center;">↓</p> <p style="text-align: center;">↑</p> <p style="text-align: center;">Coordenadas geodésicas locais do último ponto do espaço objeto a ser calculado</p> <p style="text-align: center;">↓</p>	$=$	$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \phi \\ k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \phi \\ k \\ X \\ Y \\ Z \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \\ \Delta \omega \\ \Delta \phi \\ \Delta k \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \\ \Delta \omega \\ \Delta \phi \\ \Delta k \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$	
VALORES AJUSTADOS			VALORES APROXIMADOS		CORREÇÕES AOS VALORES APROXIMADOS	

Como assumido no capítulo 3, item 3.2.1.a):

$L = L_0 + L_b$ , em que:

$L_b$  = vetor dos valores observados, de dimensões  $n \times 1$ , portanto; no caso presente,  $\bar{e}$  o vetor que contém as coordenadas fotográficas observadas<sup>9</sup> dos pontos-imagem.

$$L_b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x \\ y \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{ coordenadas fotográficas do primeiro ponto imageado} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \updownarrow \text{ coordenadas fotográficas do último ponto imageado} \end{matrix}$$

$n \times 1$

$L_o$ , no caso atual,  $\bar{e}$  o vetor que contém os valores aproximados das coordenadas fotográficas dos pontos imageados;  $L_o$   $\bar{e}$  obtido aplicando-se ao modelo matemático adotado os valores aproximados dos parâmetros, contidos no vetor  $X_o$ ; assim:.

$$L_o = F(X_o)$$

Observe-se que  $L_a$   $\bar{e}$  o vetor dos valores observados e ajustados e que

$$L_a = L_b + V \quad , \quad (3.2.1.2)$$

sendo  $V$  o vetor dos resíduos.

$P$ =matriz dos pesos atribuídos às coordenadas fotográficas; será uma matriz  $n \times n$  e, no caso de coordenadas medidas no aerotriangulador WILD A-9,  $\bar{e}$  obtida tal como descrito no capítulo 3, item 3.2.1.a).

<sup>9</sup> Na verdade, foram observadas coordenadas instrumentais e essas foram transformadas para coordenadas fotográficas, como mostrado no capítulo 3.

Observe-se que a solução do problema exigirá iterações, até que seja atingido o grau de aproximação desejado. Essas iterações são necessárias em razão de estar sendo tratado como se fosse linear um modelo matemático que, na verdade, não é linear. O ajustamento poderia ser dividido em várias fases, como abaixo:

1ª FASE: obtenção dos valores ajustados (solução do problema sem iteração):

1) estabelecer os valores aproximados dos parâmetros (a formação do vetor  $X_0$  é detalhada no item 4.3);

2) calcular  $L_0 = F(X_0)$ ; o cálculo é feito usando-se o mesmo modelo matemático que caracteriza o problema e os valores aproximados dos parâmetros;

3) calcular  $L = L_0 - L_b$ ;

4) montar a matriz A; as expressões que definem os elementos da matriz são definidas no item 4.4;

5) montar a matriz dos pesos P; no caso da configuração adotada como exemplo o aspecto e o valor dos elementos da matriz são os já mostrados. No caso geral, como se viu no capítulo 3,

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1}, \quad (3.2.1.6)$$

sendo  $\Sigma_{L_b}$  a matriz variância-covariância (MV - C) dos valores observados. Quando não se dispuser da variância dos valores observados, admite-se que as observações possuem o mesmo grau de confiança e, como estimativa grosseira do desvio padrão, pode-se assumir o dobro da menor leitura possível no equipamento empregado;  $\sigma_0^2$  é a variância da observação



de peso unitário a priori; em princípio, arbitrar-se-á  $\sigma_0^2 = 1$ ;

6) calcular  $N = A^T P A$ ;

7) obter a inversa da matriz dos coeficientes das equações normais ( $N^{-1}$ );

8) calcular  $U = A^T P L$ ;

9) calcular o vetor das correções:  $X = - N^{-1} U$ ;

10) calcular  $X_a$ , vetor dos parâmetros ajustados:

$$X_a = X_0 + X$$

11) calcular o vetor dos resíduos:

$$V = A X + L$$

2ª FASE: estimativa da precisão dos valores ajustados:

Tal fase consiste em obter a MV - C dos parâmetros ajustados, ou seja, calcular |36|:

$$\Sigma X_a = \sigma_0^2 N^{-1}$$

3ª FASE: análise estatística do ajustamento:

1) obtenção de  $\hat{\sigma}_0^2$  (variância da observação de peso unitário, a posteriori)|36|:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}$$

2) Teste de hipótese, usando a distribuição qui-quadrado:

$$H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$$

$$H_A: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$$

ou seja, a hipótese básica é a de que as variâncias da observação de peso unitário a priori e a posteriori são iguais, enquanto a hipótese alternativa é de que tais variâncias são diferentes; calcula-se:

$$\chi^2 = \frac{(n - u) \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$$

A região de rejeição, ao nível de significância de 5% será:

$$x^2 < x^2_{0.025; n-u}$$

e

$$x^2 > x^2_{0.095; n-u}$$

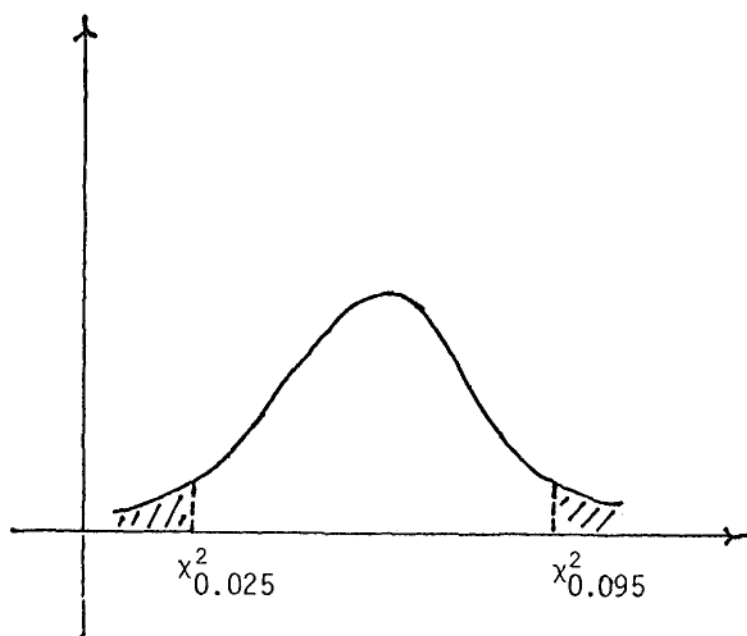


Fig. 4.2.3

Se a hipótese básica é rejeitada, é de se supor que algo está errado com o ajustamento efetuado, cabendo uma verificação: é possível que se trate de um erro sistemático não eliminado, um sistema mal condicionado, etc...

Observe-se que [37] para mais de 100 graus de liberdade ( $n - u > 100$ ), a curva de distribuição qui-quadrado é aproximadamente igual à curva de distribuição normal, com média  $(n - u)$  e variância  $2(n - u)$ . Para  $p=0,475$ , resulta  $z=1,96$  (da tabela de distribuição normal); então

$$x^2_{0,025} = (n - u) + 1,96 \sqrt{2} (n - u)$$

$$x^2_{0,975} = (n - u) - 1,96 \sqrt{2} (n - u)$$

A hipótese básica será aceita se  $x^2_{0,025} > x^2 > x^2_{0,975}$ .

#### 4ª FASE: primeira iteração

1) Os valores ajustados obtidos anteriormente passam a constituir os novos valores aproximados; assim:

$$x_0^1 = x_a$$

2) calcular  $L_0^1 = F(x_0^1)$ ; e assim por diante.

O processo continua até que ocorra convergência dos valores ou que o número de iterações atinja cinco, conforme o que aconteça primeiro. Admitê-se que houve convergência quando [38] o vetor  $X$  das cor

reções apresenta valores não superiores a  $10^{-3}$  metros para todas as coordenadas e  $10^{-3}$  rad. para todos os ângulos; não ocorrendo convergência em cinco iterações, o ajustamento deve ser verificado para as condições de erros grosseiros, erros sistemáticos não eliminados, etc...

#### 4.3 - OBTENÇÃO DOS VALORES APROXIMADOS DOS PARÂMETROS

Conforme explicitado no item 4.2, existe necessidade de estabelecer os valores aproximados dos parâmetros, contidos no vetor  $X_0$ , o qual permitirá o início do ciclo que deverá redundar na obtenção dos valores ajustados desses parâmetros, possibilitando a execução simultânea da aerotriangulação e do ajustamento.

a) obtenção dos valores aproximados dos parâmetros de orientação externa:

1) como admitimos que as fotografias são verticais, admitimos em consequência que, para todas as fotografias da faixa ou bloco,  $\omega = \phi = 0^\circ$ ;

2) a partir do valor da altitude de vôo ( $H$ ) - conhecida - e da altitude média dos pontos do terreno ( $Z_p$ ), obtida pela média das altitudes dos pontos de apoio ou usando-se as altitudes de uma carta ou mapa, caso disponível, obtem-se o valor de  $Z_0$  (em metros, no sistema de coordenadas do espaço objeto, isto é, sistema geodésico local):

$$Z_0 = H - Z_p \quad (\text{vide fig. 4.3.1})$$

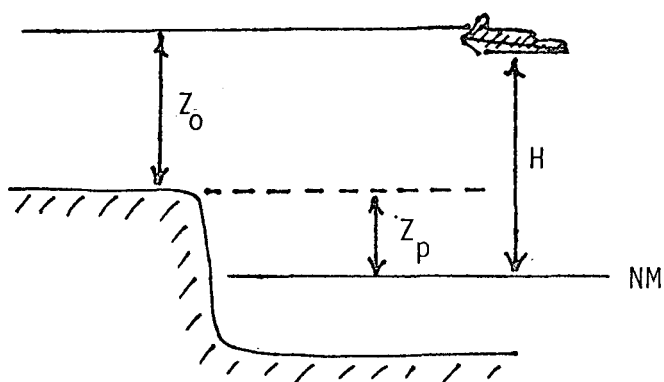


Fig. 4.3.1

Caso os desníveis na faixa (ou bloco) não excedam 200 metros, é possível adotar o mesmo  $Z_0$  para toda a faixa (ou bloco); caso isto não ocorra, é possível dividir a faixa (ou bloco) em seções nas quais

os desníveis não excedam aquele valor; o processo pode prosseguir até o limite de determinar um valor de  $Z_0$  para cada fotografia;

3) resta agora obter o valor de  $k$  (ângulo que a direção de vôo forma com o eixo dos  $X$  do sistema geodésico local) para cada faixa e as coordenadas  $X_0$  e  $Y_0$  do centro perspectivo de cada fotografia. Para tal, em uma folha de papel milimetrado, usando a escala média das fotos - considerada constante, por facilidade - faz-se a plotagem dos pontos de apoio terrestre. Observe-se que, para fins de Cartografia Náutica, é prático fixar como origem do sistema geodésico local o ponto de apoio situado mais à esquerda. Para a faixa representada na figura 4.2.1, esquematicamente teríamos algo como na figura 4.3.2:

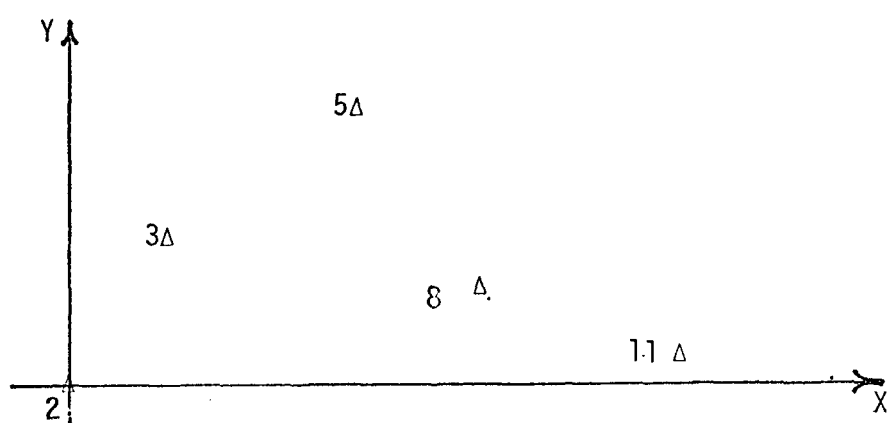


Fig. 4.3.2

Tomando agora um papel vegetal e assumindo uma origem qualquer, traça-se os eixos  $x$  e  $y$  do sistema fotográfico; usando dois pontos de apoio situados na primeira foto, faz-se a plotagem desses pontos no sistema fotográfico, valendo-se das coordenadas fotográficas corrigidas dos erros sistemáticos; agora, superpondo-se o vegetal ao papel milimetrado, faz-se coincidir os pontos de apoio plotados. Para a mesma faixa já representada, teríamos alguma coisa como abaixo (Figura 4.3.3):

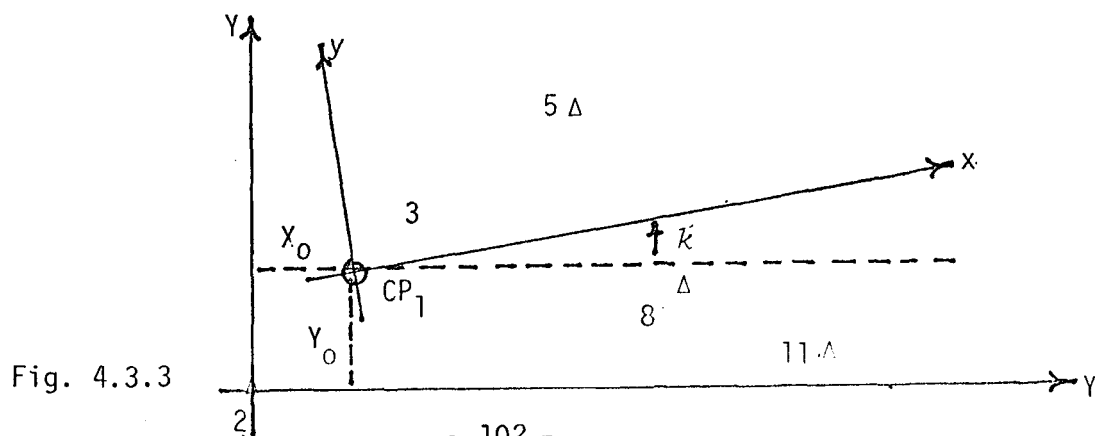


Fig. 4.3.3

A interseção dos eixos  $x$  e  $y$  do sistema fotogramétrico se dá no centro perspectivo e, de sua projeção no papel milimetrado, é possível obter as coordenadas  $X_0$  e  $Y_0$ , passando-as para o sistema geodésico local utilizado (isto é, multiplicando as coordenadas lidas no papel milimetrado pelo denominador da escala). Identicamente, fica definido o ângulo  $k$  que, por simplicidade, pode ser assumido constante para cada faixa. Utilizando as coordenadas fotográficas dos pontos de apoio comuns às fotos 1 e 2 da faixa é possível calcular a base aérea ( $b$ ), distância entre os pontos principais das duas fotos, assumindo esse valor como a distância entre os centros perspectivos das várias fotos que compõem a faixa; multiplicando-se esse valor pelo denominador da escala, obtém-se o valor da base aérea no terreno ( $B$ ). Como  $b$  foi assumido ser constante para toda a faixa, no papel milimetrado basta marcar essa distância a partir da representação do centro perspectivo de cada fotografia para obter a representação do centro perspectivo da foto seguinte<sup>10</sup>. Resultaria algo como indicado abaixo (Figura 4.3.4):

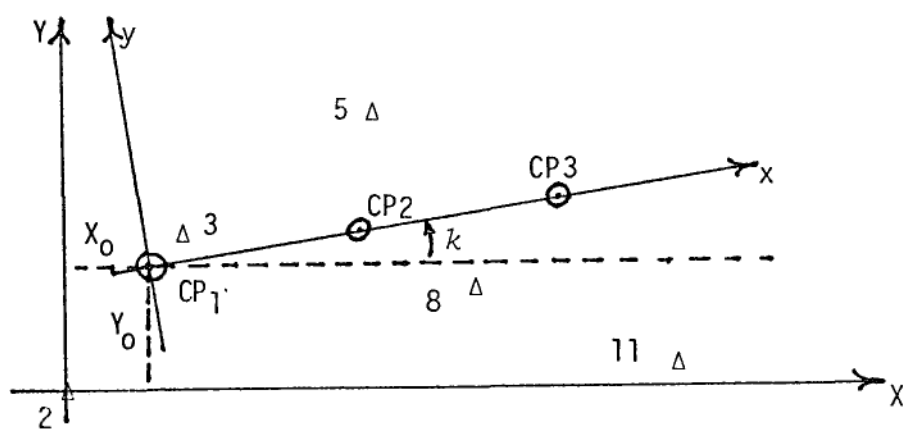


Fig. 4.3.4

O procedimento a ser adotado para as várias faixas que compõem o bloco pode ser inteiramente semelhante, do que resulta ser fac

<sup>10</sup> É possível imaginar alternativas para o procedimento proposto; uma que ocorre imediatamente, já que  $b$  e  $k$  são tidos como constantes, é fazer

$$\Delta x = b \cos k$$

$$\Delta y = b \sin k$$

ou em coordenadas do terreno:

$$\Delta X = B \cos k$$

$$\Delta Y = B \sin k.$$

Os incrementos seriam adicionados (ou subtraídos, conforme a direção de vôo) às coordenadas do centro perspectivo da foto anterior.

tível a obtenção dos valores aproximados de todos os parâmetros de orientação externa necessários.

b) obtenção dos valores aproximados das coordenadas dos pontos que participarão da aerotriangulação: como já se dispõe de um papel milimetrado no qual estão traçados a direção de voo das faixas que compõem o bloco e os centros perspectivos das várias fotografias, basta plotar os pontos que participarão da aerotriangulação no sistema fotográfico de cada foto e ler suas coordenadas no sistema geodésico local, observando a necessária conversão de escalas. Esquemáticamente, para o exemplo aqui adotado, a situação poderia ser representada como abaixo (figura 4.3.5):

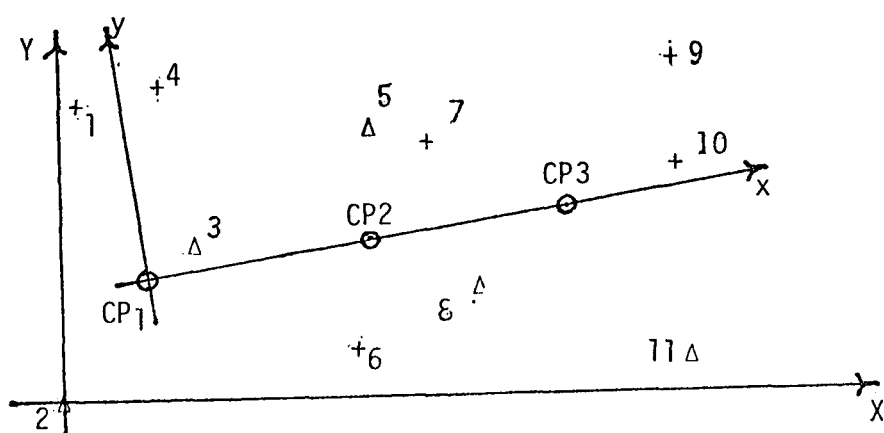


Fig. 4.3.5

#### 4.4 - DERIVADAS ENVOLVIDAS

Adiante são listadas as expressões das derivadas de  $x$  e  $y$  em relação aos parâmetros de orientação externa e em relação aos parâmetros relativos ao espaço-objeto, necessárias à montagem da matriz  $A$ . O valor dessas expressões é calculado usando-se o valor aproximado dos parâmetros, uma vez que tomados em  $X_0$ . Observe-se que as expressões que definem os termos da matriz de rotação foram obtidos no capítulo 2; observe-se também que, por simplicidade e compatibilização com a literatura existente, fizemos o numerador da  $F_x$  igual a  $m$ , o numerador da  $F_y$  igual a  $n$  e o denominador de ambas igual a  $q$ . Assim passamos a ter:

$$m = m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)$$

$$n = m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)$$

$$q = m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)$$

e o modelo matemático passou a ser escrito:

$$\begin{aligned} x &= f \frac{m}{q} \\ y &= f \frac{n}{q} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Seguem-se as expressões das derivadas em foco [39]:

$$\frac{\partial x}{\partial X_0} = - \frac{f}{q^2} (q \cdot m_{11} - m \cdot m_{31})$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y_0} = - \frac{f}{q^2} (q \cdot m_{12} - m \cdot m_{32})$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z_0} = - \frac{f}{q^2} (q \cdot m_{13} - m \cdot m_{33})$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = - \frac{f}{q^2} \{ q[(Y-Y_0)m_{13} - (Z-Z_0)m_{12} - m[(Y-Y_0)m_{33} - (Z-Z_0)m_{32}]] \}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = - \frac{f}{q^2} \{ q[(X-X_0)\cos k \sin \phi - (Y-Y_0)\cos k \cos \phi \sin \omega + (Z-Z_0)\cos k$$

$$\cos \phi \cos \omega] + m[(X-X_0)\cos \phi + (Y-Y_0)\sin \phi \sin \omega - (Z-Z_0)\sin \phi$$

$$\cos \omega] \}$$

$$\frac{\partial x}{\partial k} = \frac{f}{q} [(X-X_0)m_{21} + (Y-Y_0)m_{22} + (Z-Z_0)m_{23}]$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = - \frac{\partial x}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = - \frac{\partial x}{\partial Y_0}$$

$$\frac{\partial x}{\partial Z} = - \frac{\partial x}{\partial Z_0}$$

$$\frac{\partial y}{\partial X_0} = - \frac{f}{q^2} (q \cdot m_{21} - n \cdot m_{31})$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y_0} = - \frac{f}{q^2} (q \cdot m_{21} - n \cdot m_{32})$$

$$\frac{\partial y}{\partial Z_0} = - \frac{f}{q^2} (q \cdot m_{23} - n \cdot m_{33})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{f}{q^2} \{ q [(Z-Z_0)m_{22} - (Y-Y_0)m_{23}] + n [(Y-Y_0)m_{33} - (Z-Z_0)m_{32}] \}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = - \frac{f}{q^2} \{ -q [(X-X_0) \operatorname{sen} k \operatorname{sen} \phi - (Y-Y_0) \operatorname{sen} k \cos \phi \operatorname{sen} \omega + (Z-Z_0)$$

$$\operatorname{sen} k \cos \phi \cos \omega] + n [(X-X_0) \cos \phi + (Y-Y_0) \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \omega - (Z-Z_0) \operatorname{sen} \phi \cos \omega] \}$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = - \frac{f}{q} [(X-X_0)m_{11} + (Y-Y_0)m_{12} + (Z-Z_0)m_{13}]$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = - \frac{\partial y}{\partial X_0}$$

$$\frac{\partial y}{\partial Y} = - \frac{\partial y}{\partial Y_0}$$

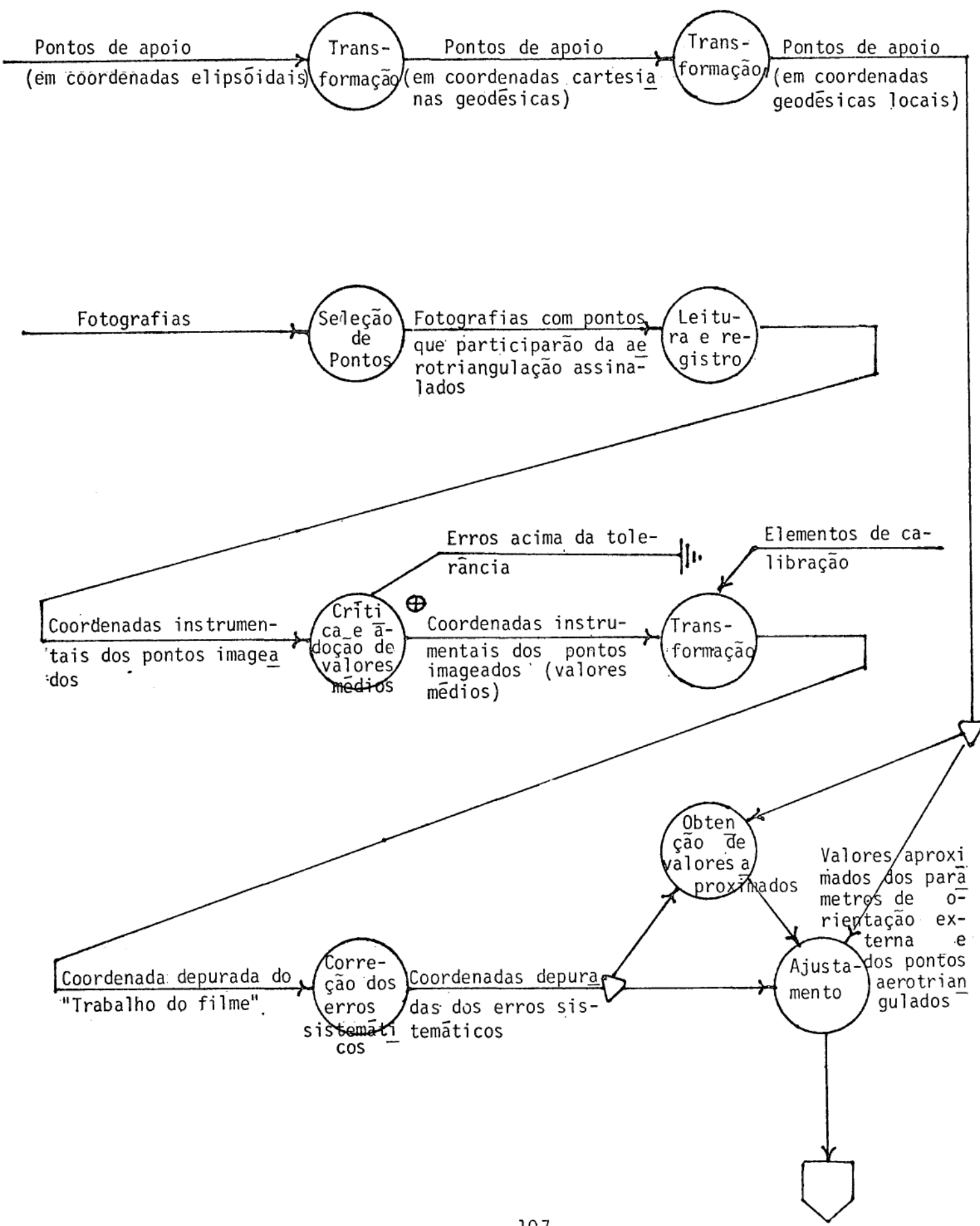
$$\frac{\partial y}{\partial Z} = - \frac{\partial y}{\partial Z_0}$$

#### 4.5 - MACRO-FLUXOGRAMA DO PROCESSO

A figura 4.5.1, adiante, apresenta, sob a forma de fluxo de bolhas, o caminho percorrido e as transformações sofridas pelos dados ao longo do processo.

Figura 4.5.1 - páginas 108 e 109.





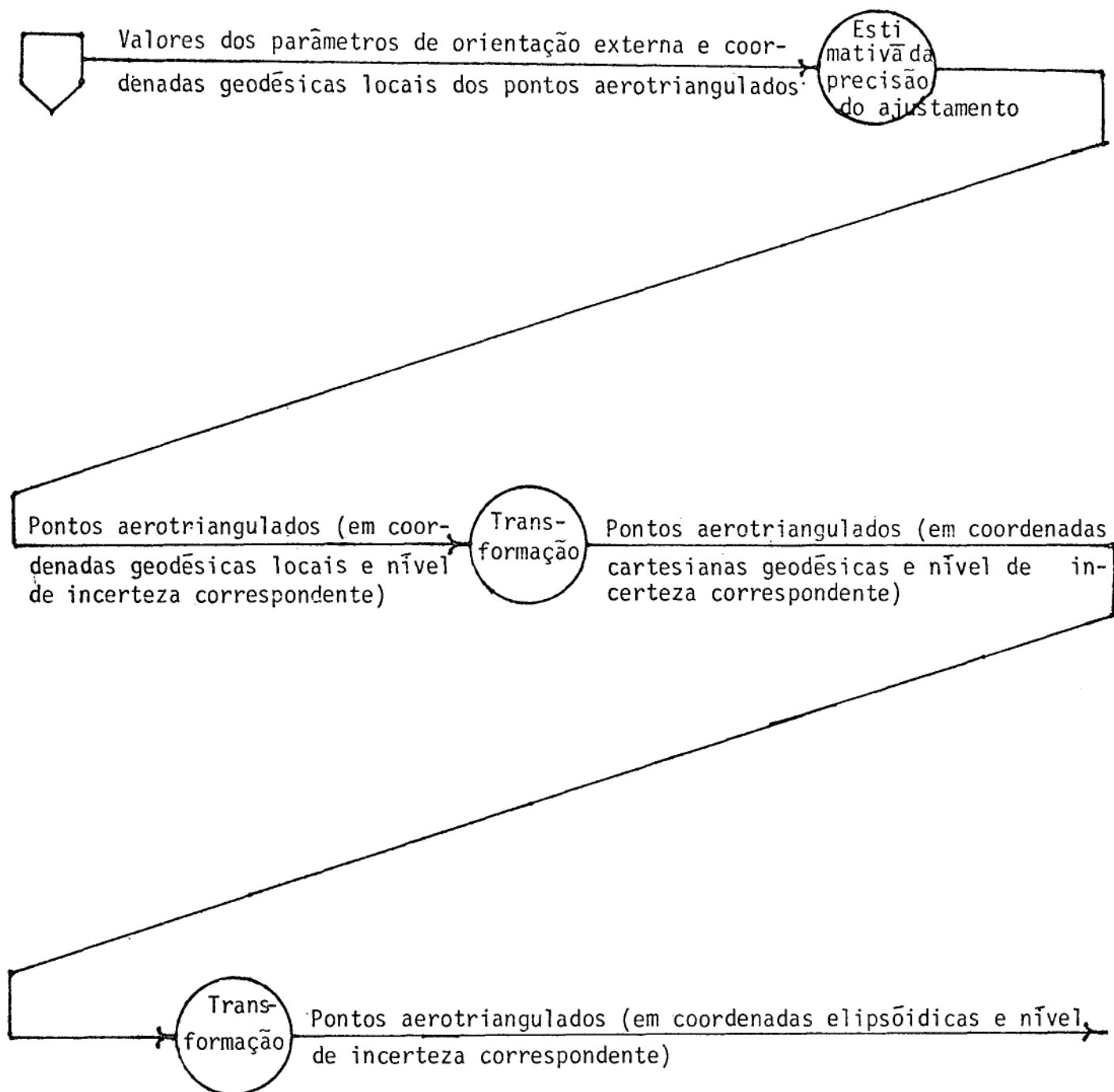
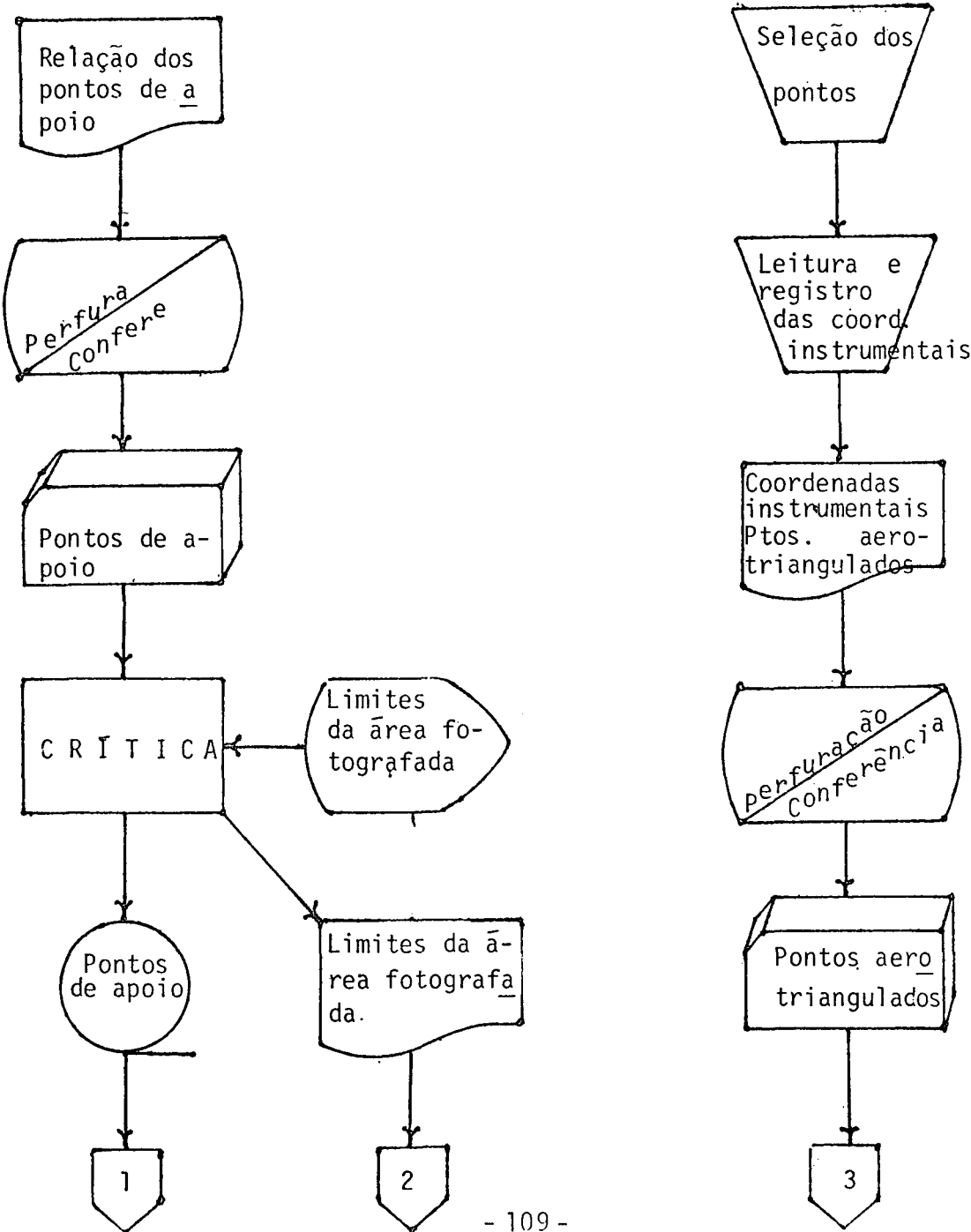
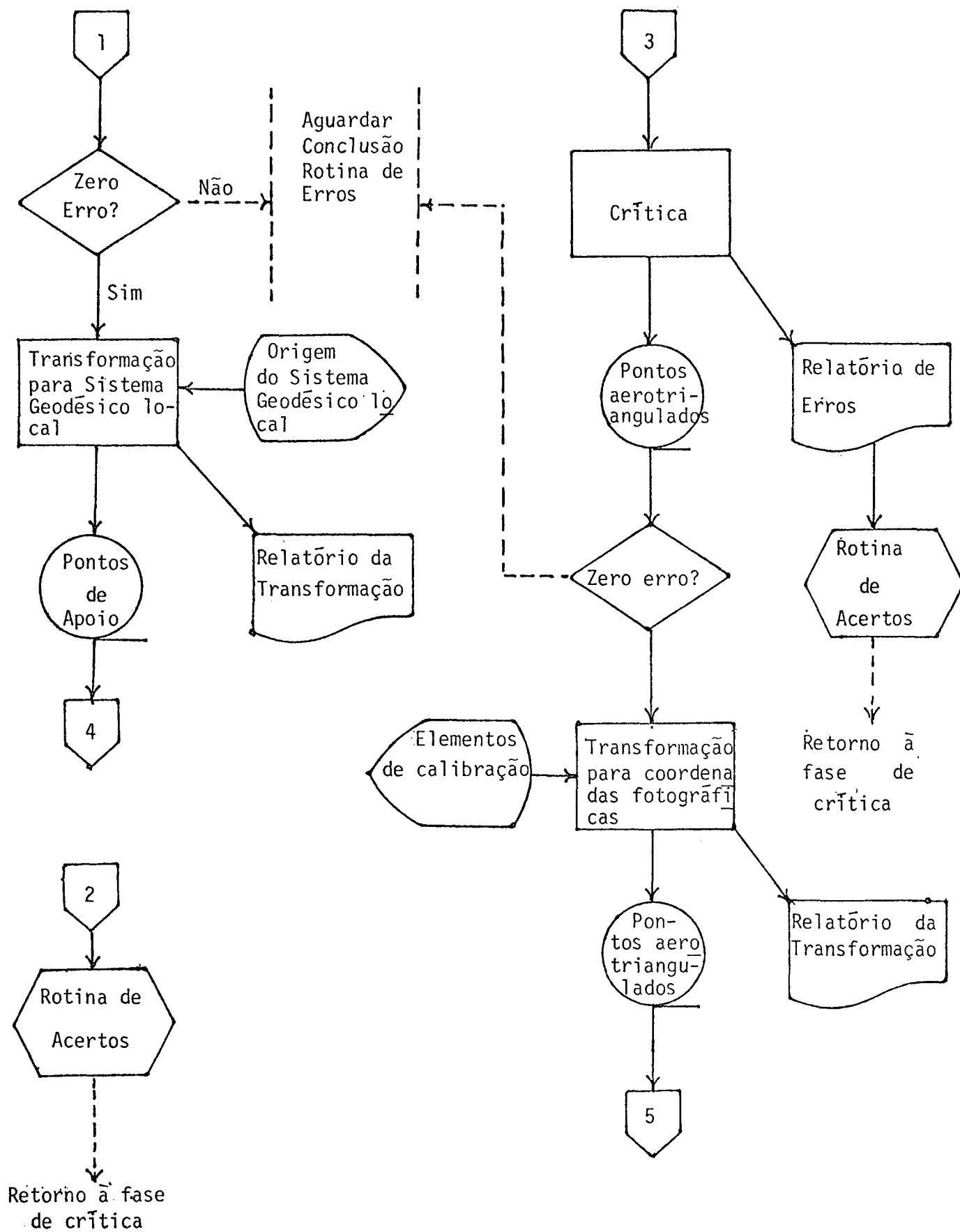
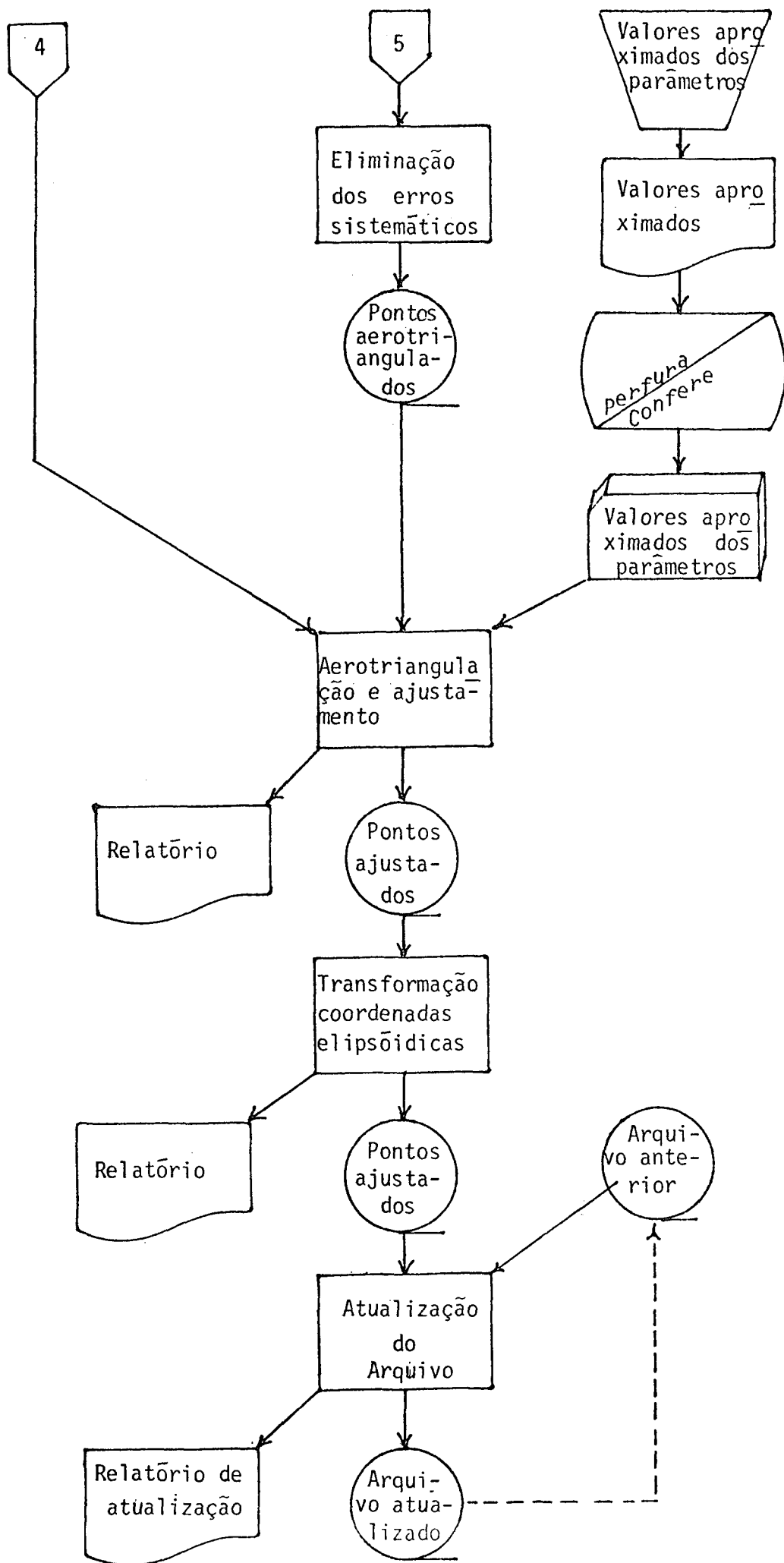


Fig. 4.5.1

Em termos ainda diagramáticos, mas em um nível mais ligado ao aspecto físico, podemos representar o fluxograma do processo como se segue (Figura 4.5.2). Admite-se que todas as fases anteriores às apresentadas (planejamento e realização do vôo fotogramétrico, escolha dos pontos de apoio, determinação da posição desses pontos, etc...) já foram executadas.







Evidentemente o fluxograma apresentado admitiu uma determinada configuração de equipamentos de P.D.; nada obsta, no entanto, que o processo lógico seja implementado ao nível de máquinas de calcular programáveis ou micro-computadores, com possíveis limitações que poderiam levar até a entrada manual dos dados e ao registro dos resultados também de forma manual. Para a implementação do processo seriam necessários os seguintes passos:

- a) elaborar instruções relativas ao planejamento de vôo e à obtenção do apoio terrestre;
- b) definir os códigos ou apontadores que permitam o relacionamento FICHA de DESCRIÇÃO-PONTO AEROTRIANGULADO;
- c) estabelecer rotina a ser seguida para operação do equipamento no qual se fará a leitura das fotocoordenadas;
- d) definir os "lay-out" dos formulários a serem utilizados para registro dos dados;
- e) definir os relatórios a serem fornecidos pelos diversos programas de processamento;
- f) definir os critérios de crítica para detecção de inconsistências e rejeição de dados;
- g) definir, codificar e testar os programas de processamento;
- h) estabelecer as regras para utilização dos programas de processamento;
- i) definir o "lay-out" do arquivo de coordenadas e sua ordenação (seqüência das informações);
- j) fixar as recomendações para implantação dos programas e do processo;
- l) funcionamento em paralelo com algum método já testado para comparação de resultados;
- m) documentação final, a nível de manutenção e a nível de usuário.

#### 4.6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Ao longo deste texto, acredita-se ter deixado claro que:

a) é desejável a realização de vôos fotogramétricos planejados especificamente para fins de cartografia náutica; a utilização de vôos realizados para outros fins pode ser entendido como uma simplificação destinada a fazer face a uma situação de emergência, e não como procedimento normal;

b) a utilização da restituição realizada por organizações não comprometidas com a cartografia náutica tal como em a), deveria ser entendida como um procedimento de exceção ou emergência, principalmente quando destinada a cartas náuticas de grande escala;

c) mesmo utilizando equipamentos analógicos antigos de vinte anos e recursos limitados e bastante convencionais é possível, desde que esteja disponível alguma capacidade de processamento, introduzir nesse ambiente os métodos analíticos que caracterizam a moderna Fotogrametria e obter precisões compatíveis com as redes geodésicas de 3ª ordem;

Admitindo-se que a produção de Cartas Náuticas é a atividade-de-fim da Diretoria de Hidrografia e Navegação, que a qualidade (e mesmo a velocidade de produção) dessas cartas vem sendo afetada pelo uso inadequado dos recursos proporcionados pela Fotogrametria; que é necessário utilizar a Fotogrametria desde as fases que antecedem a Campanha Hidrográfica, emprestando racionalidade aos levantamentos; que é necessário eliminar a atual dependência tecnológica; que é necessário acumular experiência no setor, uma vez que os requisitos de automatização cartográfica e mesmo as formas futuras de definição da batimetria apontam fortemente para um uso das técnicas fotogramétricas, considera-se conveniente que a Diretoria de Hidrografia e Navegação empregue extensivamente a solução aqui apresentada. A utilização constante do processo permitirá seu aperfeiçoamento e permitirá à DHN retomar o desenvolvimento que trilhava normalmente nessa área. Se à presente tese, de alguma forma, servir de documento de trabalho para que tal ocorra, o esforço de escrevê-la não terá sido vão.

Cabo Frio, em agosto de 1982.

## NOTAS DE REFERÊNCIAS

- [01] FERNANDES, J.A. Barahona. *Manual de Hidrografia*. Lisboa, Instituto Hidrográfico. 1967. p.01.
- [02] Ibid., p.618-620.
- [03] WILD, Casa. *Autógrafo granangular WILD A9*. Rio de Janeiro, 1963.p.13
- [04] GHOSH, Sanjib K. *Analytical photogrammetry*. Pergamon Press, New York, 1979. p.41.
- [05] GEMAEL, C. *Introdução à Geodésia Geométrica: 1ª parte*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. p.15-16.
- [06] GEMAEL, C. *Aplicações do cálculo matricial em Geodésia: transformação de coordenadas*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1973. p.5.
- [07] LUGNANI, João Bosco. *Transformações Geométricas (manuscrito)*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1981. p.44.
- [08] Ibid., p. 2-3.
- [09] MERCHANT, Dean C. *Analytical Photogrammetry; theory and practice, part I*. Ohio; the Ohio State University, 1979: p. 3.5.
- [10] Ibid., p..31.
- [11] Ibid., p. 3.1 a 3.5.
- [12] GHOSH, Sanjib K. *Analytical...* p. 54.
- [13] Ibid., p. 52.
- [14] LUGNANI, João Bosco. *Transformações Geométricas...* p. 17.
- [15] EL-HAKIM, Sabry F. *Potentials and limitations of photogrammetry for precision surveying. Ph. D Dissertation*. New Brunswick, University of New Brunswick, 1979. p. 11.
- [16] GHOSH, Sanjib K. *Analytical ...* p. 85.
- [17] WILD, Casa. *Autógrafo ...* p. 1.
- [18] MASRY, S. E. and S. MacRitchie. *Can film "shrinkage" be ignored? Technical Report*. New Brunswick (51), University of New Brunswick, 1978. p. 1.



- |19| GHOSH, Sanjib K.. *Phototriangulation*. Lexington, Massachusetts, Lexington books, 1975. p. 33-4.
- |20| GEMAEL, C. *Aplicações do cálculo matricial em Geodésia: ajustamento de observações*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. p. 32.
- |21| Ibid., p. 33.
- |22| Ibid., p. 35.
- |23| Ibid., p. 13-14.
- |24| Ibid., p. 37.
- |25| Ibid., p. 8.
- |26| GHOSH, Sanjib K. *Analytical* ... p. 88.
- |27| Ibid., p. 87-88.
- |28| Ibid., p. 87.
- |29| Ibid., p. 88.
- |30| BUJAKIEWICZ, Aleksandra. *The correction of lens distortion with polynomials*. The Canadian Surveyor, 30 (2), 1976. p. 75.
- |31| MERCHANT, Dean C. *Analytical* ... p. 4-13.
- |32| BUJAKIEWICZ, Aleksandra. *The correction* ... p. 75.
- |33| MERCHANT, Dean C. *Analytical* ... p. 4.13.
- |34| LUGNANI, João Bosco, Quintino Dalmolin e Moacir José Quintino. *Introdução à Fotogrametria, segunda parte*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1977. p. 20.
- |35| MERCHANT, Dean C. *Analytical* ... p. 4.16 - 4.18.
- |36| GEMAEL, C. *Aplicações do cálculo matricial em Geodésia: ajustamento* ... p. 37.
- |37| MOURA, José Ozildo. *Aplicação do ajustamento livre à Fotogrametria. Dissertação de Mestrado*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981. p. 96.
- |38| Ibid., p. 95.
- |39| Ibid., p. 84-87.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDRADE, José Bittencourt. *Photogrammetric Refraction*. Ph. D Dissertation. Ohio, the Ohio State University, 1977. 117 p.
- BRASIL. Diretoria de Hidrografia e Navegação. *Coletânea de Instruções Técnicas sobre fotogrametria*. Rio de Janeiro, 1962. 25 p.
- BUJAKIEWICZ, Aleksandra. *The correction of lens distortion with polynomials*. The Canadian Surveyor, 30 (2): 67-76, 1976.
- EL-HAKIM, Sabry F .. *Potentials and limitations of photogrammetry for precision surveying*. Ph. D Dissertation. New Brunswick, University of New Brunswick, 1979. 168 p.
- FAIG, Wolfgang. *Aerotriangulation. Lecture Notes*. New Brunswick (40), University of New Brunswick, 1976. 117 p.
- FERNANDES, Roberto A. *A carta náutica sob o ponto de vista fotogramétrico*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1981. 32 p.
- FERNANDES, J. A. Barahona. *Manual de hidrografia*. Lisboa, Instituto Hidrográfico, 1967. 711 p.
- GEARY, Edmund L. *Photogrammetry in nautical chart maintenance*. In: XI Pan American Consultation on Cartography, Washington, D.C., 1969. Papers... Washington, Department of the Navy, s.d. 13 p.
- GEMAEL, C. *Aplicações do cálculo matricial em Geodésia: ajustamento de observações*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1976. 100 p.
- GEMAEL, C. *Aplicações do cálculo matricial em Geodésia: transformação de coordenadas*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1973. 49 p.
- GEMAEL, C. *Introdução à Geodésia Geométrica; 1ª parte*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1977. 153 p.
- GHOSH, Sanjib K. *Analytical photogrammetry*. Pergamon Press, New York, 1979. 203 p.
- GHOSH, Sanjib K. *Phototriangulation*. Lexington, Massachusetts, Lexington books, 1975. 241 p.

- GHOSH, Sanjib K. *Theory of stereophotogrammetry (2ND ED)*. Ohio, the Ohio State University, 1972. 206 p.
- HIDROGRAFIA, Organização Internacional. *Repertório de Resoluções Técnicas*. Monaco, 1981.
- LUGNANI, João Bosco; Quintino Dalmolin e Moacir José Quintino. *Introdução à fotogrametria , segunda parte*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1977. 82 p.
- LUGNANI, João Bosco. *Transformações geométricas (manuscrito)*. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, 1981. 49 p.
- MASRY, S.E. *Basics of instrumental and analytical photogrammetry*. New Brunswick, University of New Brunswick, 1974. 133 p.
- MASRY, S.E. and S. MacRitchie. *Can film "shrinkage" be ignored? Technical Report*. New Brunswick (51), University of New Brunswick, 1978.-18 p.
- MERCHANT, Dean C. *Analytical Photogrammetry; theory and practice, part I*. Ohio, the Ohio State University, 1979.. 96 p.
- MERCHANT, Dean C. *Analytical Photogrammetry; theory and practice, part II*. Ohio, the Ohio State University, 1980. 98 p.
- MOURA, José Ozildo. *Aplicação do Ajustamento livre à Fotogrametria*. Dissertação de Mestrado. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981. 122 p.
- REINO UNIDO. The Hydrographer of the Navy. *Admiralty manual of hydrographic surveying, vol. two, chapter five*. Taunton, Somerset, 1973. 35 p.
- SANTORO, H.L. *A aerotriangulação nos países em desenvolvimento*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CARTOGRAFIA, Brasília, julho de 1975. Papers ... Diretoria do Serviço Geográfico, s.d. 10 p.
- SWANSON, Lawrence W. *Photogrammetric surveys for nautical charting: use of color and infrared photography*. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF PHOTOGRAMMETRY, 9, Londres, setembro de 1960. Papers... Washington, Coast and Geodetic Survey, s.d. 8 p.
- VIANNA, Ibis da Silva. *Aerofotogrametria*. Rio de Janeiro, Diretoria de Hidrografia e Navegação (DHN), 1977. 56 p.
- WILD, Casa. *Aparato para la transferencia de puntos WILD PUG3*. Rio de Janeiro, 1963. 22 p.
- WILD, Casa. *Autógrafo granangular WILD A9*. Rio de Janeiro, 1963. 101 p.

WILD, Casa. *El transformador de clisės WILD U3-A*. Rio de Janeiro, 1962.  
25 p.

WOLF, Paul R. *Elements of photogrammetry*. Tokyo, McGraw-Hill, 1974. 562p.

## APÊNDICES

- Instruções para utilização do Aerotriangulador WILD A-9 para leitura de Coordenadas de Foto
- Programa de Processamento
- Descrição dos Registros de Entrada
- Exemplo

## INSTRUÇÕES PARA UTILIZAÇÃO DO AEROTRIANGULADOR WILD A-9 PARA LEITURA DE COORDENADAS DE FOTO

As instruções que se seguem tem o propósito de permitir o emprego do aerotriangulador WILD A-9 como comparador, isto é, para leitura de coordenadas instrumentais de pontos imageados em fotos individuais. A sequência das operações é apresentada abaixo:

- centrar o diafilme ou dispositivo no porta-placas e instalá-lo no projetor que será empregado. O outro projetor permanece apagado. Observar que deve ser usado o mesmo projetor durante toda a operação de leitura de coordenadas instrumentais de fotos e que o prisma de Dove deve permanecer todo o tempo em posição normal. Dessa forma o instrumento estará sendo utilizado como um monocomparador;

- a origem das coordenadas instrumentais é fixada no canto inferior esquerdo do diapositivo ou diafilme e não é alterada durante a operação de leitura de coordenadas. Tal procedimento visa evitar o surgimento de coordenadas instrumentais negativas, as quais facilmente induzem ao erro de leitura no WILD A-9, e evitar a variação de parâmetros durante o ajustamento;

- uma vez deslocada a marca-índice até o canto inferior esquerdo do diapositivo ou diafilme são introduzidos os valores:

$$f = 50,00 \text{ mm}$$

$$Z = 100,00 \text{ mm}$$

$$b_x = b_y = b_z = 0,00 \text{ mm}$$

$$x=y= 0,00 \text{ mm}$$

$$\omega = \phi = 100,00^\circ$$

$$k = 0,00^\circ$$

Observar que:

a) Os valores de  $\omega$  e  $\phi$  garantem que o plano x-y está paralelo ao plano do diapositivo;

b) Os valores de f e Z reconstituem as dimensões do negativo original, uma vez que o diafilme ou diapositivo é reduzido;

- a leitura das coordenadas (x, y) dos pontos imageados em cada diafilme ou diapositivo inicia-se pela marcas fiduciais; a primeira a ser lida é a localizada mais à esquerda e as demais são lidas no sentido

horário de rotação. O centro fiducial, apesar de materializado, não é lido. Após a leitura das coordenadas das marcas fiduciais realiza-se a leitura das coordenadas dos pontos imageados na projeção do diafilme ou diapositivo. Como o registro das coordenadas permaneceu manual, devem ser tomadas as precauções julgadas cabíveis visando minimizar a ocorrência de erros grosseiros;

- a centragem no porta-placas, instalação no projetor, leitura e registro das coordenadas, iniciando-se pelas marcas fiduciais, prosseguem até o último diafilme ou diapositivo de interesse.

DESCRIÇÃO DOS REGISTROS DE ENTRADA

































EXEMPLO

## EXEMPLO/RESULTADOS

Foram realizados vários testes com o programa, com resultados satisfatórios, e hoje o programa já se encontra em produção, realizando AT a partir de um voo sobre a Baía da Ilha Grande, RJ. Os elementos aqui transcritos são oriundos de uma faixa voada sobre o Porto de Cabedelo, em 1967.

Dados sobre o Voo:

Projeto = I - 800 - 3/67

Altura = 4600 metros

Escala das Fotos = 1:30 000

Nº das Fotos = 10

Câmara Zeiss RMK 15/23

$f = 153.23$  mm (e mais nenhum dado).

Infelizmente, a faixa teve de ser truncada devido ao mau estado de um diafilme (bem a meio da faixa) que não pode ser recomposto. Em compensação, as coordenadas empregadas como referência estão testadas à saciedade, ao longo dos anos e de várias formas diferentes. Este foi o melhor conjunto para teste que foi possível obter, sob o ponto de vista de confiabilidade das coordenadas tomadas como referência.

PONTO	COORDENADAS	AT	TOPOGRÁFICAS <sup>(1)</sup>	DIFERENÇAS
6 (INDIA)	$\phi$	06-58-14.88	06-58-14.85	0,03"
	$\lambda$	034-51-26.19	034-51-26.19	0,00"
7 (CAIS)	$\phi$	06-58-26.00	06-58-28.27	- 2,27"
	$\lambda$	034-50-14.93	034-50-15.06	- 0,13"
12 (BATENTE)	$\phi$	06-58-12.04	06-58-17.41	- 5,37"
	$\lambda$	034-50-24.94	034-50-25.01	- 0,07"
13 (TANQUE DIANA)	$\phi$	06-58-03.10	06-58-06.70	- 3,60"
	$\lambda$	034-50-13.87	034-50-13.96	- 0,09"
14 (TANQUE ELISA)	$\phi$	06-58-02.98	06-58-06.52	- 3,54"
	$\lambda$	034-50-13.31	034-50-13.46	- 0,15"
15 (COLENE)	$\phi$	06-58-06.17	06-58-10.39	- 4,22"
	$\lambda$	034-50-22.69	034-50-22.76	- 0,07"

<sup>1</sup> Interseção AV e Lateral

Média ( $\Delta\phi$ ) = - 3,16"

Média ( $\Delta\lambda$ ) = - 0,09"



REGISTRO DE COORDENADAS INSTRUMENTAIS

DATA \_\_\_\_\_

OPERADOR \_\_\_\_\_

PG \_\_\_\_\_ DE \_\_\_\_\_

FOTO	Nº DO PONTO	(XXX.XXX) <sup>x</sup>	(XXX.XXX) <sup>y</sup>	OBSERVAÇÕES
1	MF-1	001.528	114.343	Marca Fiducial
	MF-2	114.803	227.822	Marca Fiducial
	MF-3	228.324	114.438	Marca Fiducial
	MF-4	114.870	001.057	Marca Fiducial
	01	118.834	153.517	Lima
	02	085.690	151.372	Chaminé
	03	126.362	050.430	Monumento
	04	059.421	098.526	Mike
	06	081.291	147.816	India
	07	098.450	075.432	Cais
	08	025.991	214.468	03A
	09	029.850	016.124	03B
	10	025.044	114.127	03C
	12	110.043	091.885	Batente
	13	124.893	085.861	Tanque Diana
	14	125.274	085.422	Tanque Elisa
	15	117.660	092.662	Colene
2	MF-1	001.595	114.378	Marca Fiducial
	MF-2	114.841	227.718	Marca Fiducial
	MF-3	228.297	114.312	Marca Fiducial
	MF-4	114.754	001.001	Marca Fiducial
	01	210.854	154.672	
	02	177.506	152.409	
	03	217.951	051.482	
	04	150.154	098.761	
	05	119.053	028.731	Kilo

REGISTRO DE COORDENADAS INSTRUMENTAIS

DATA \_\_\_\_\_

OPERADOR \_\_\_\_\_

PG \_\_\_\_\_ DE \_\_\_\_\_

FOTO	Nº DO PONTO	(XXX.XXX) <sup>x</sup>	(XXX.XXX) <sup>y</sup>	OBSERVAÇÕES
	06	172.561	148.845	
	07	189.789	076.003	
	08	115.138	217.962	
	09	120.180	016.073	
	10	114.823	114.377	
	11	031.430	204.688	
	12			
	13			
	14	217.032	086.112	
	15	209.397	093.342	
3	MF-1	001.543	114.288	Marca Fiducial
	MF-2	114.709	227.683	Marca Fiducial
	MF-3	228.149	114.430	Marca Fiducial
	MF-4	114.799	001.139	Marca Fiducial
	05	218.032	019.000	
	08	215.294	211.472	
	09	219.059	005.896	
	10	214.315	107.247	
	11	131.314	197.825	

PROGRAMA DE PROCESSAMENTO

C  
C.... PROGRAMA DESTINA-SE A REALIZAR AEROTRIANGULACAO ANALITICA  
C.... PARA FINS DE CARTOGRAFIA NAUTICA. EH EFETUADO AJUSTAMENTO  
C.... EM BLOCO E SAO EMPREGADAS INJUNCOES ABSOLUTAS (COORDENADAS  
C.... DOS PONTOS DE APOIO)  
C  
C.... A CONCEITUACAO DA SOLUCAO E A DOCUMENTACAO DIAGRAMATICA DO  
C.... PROGRAMA ENCONTRAM-SE DESENVOLVIDOS NA PARTE MONOGRAFICA  
C.... DA TESE DO CF ROBERTO ANDRADE FERNANDES  
C  
C  
C  
C.... OBSERVACAO IMPORTANTE - OS VALORES DAS DIMENSÕES NO PROGRAMA  
C.... PRINCIPAL E NA SR INVERTIN DEVEM SER AJUSTADOS PARA  
C.... CADA CASO DE ACORDO COM AS INSTRUÇÕES CONSTANTES  
C.... DESTA LISTAGEM  
C  
C  
C  
C.... VARIÁVEIS GLOBAIS  
C  
C.... A = SEMI-EIXO MAIOR DO ELIPSOIDE, EM METROS  
C.... E2 = EXCENTRICIDADE DO ELIPSOIDE  
C.... NPOIO = NUMERO DE PONTOS DE APOIO  
C.... NFGTOS = NUMERO DE FOTOS  
C.... NAERO = NUMERO DE PONTOS AEROTRIANGULADOS  
C.... NIMAGE = NUMEROS DE PONTOS IMAGEADOS NAS FOTOS  
C.... NRPTO = VETOR QUE CONTEM OS NUMEROS DOS PONTOS DE APOIO  
C  
C.... MODULO 1 DESTINA-SE INICIALIZAR PROCESSO E TRANSFORMAR  
C.... AS COORDENADAS ELIPSOIDICAS DOS PONTOS DE APOIO EM  
C.... COORDENADAS LOCAIS  
C  
C.... ONCART = NUMERO DA CARTA NAUTICA  
C.... CARTA = TITULO DA CARTA NAUTICA  
C.... ELIPSE = NOME DO ELIPSOIDE ADOPTADO  
C.... IORIGE = FLAG QUE POSSIBILITA ACESSO DO PRIMEIRO PONTO DE APOIO  
C.... COMO ORIGEM DO SISTEMA GEODESICO LOCAL.  
C.... LAT = LATITUDE. EH LIDA EM GRAUS E DECIMOS E CONVERTIDA APOS  
C.... LONG = LONGITUDE. EH LIDA EM GRAUS E DECIMOS E CONVERTIDA APOS  
C.... H = ALTITUDE ORTOMETRICA, EM METROS AO DECIMO.  
C.... VAR1 = VARIANCIA (PLANIMETRICA)  
C.... VAR2 = VARIANCIA (ALTIMETRICA)  
C.... COMETA = VETOR QUE CONTEM COMENTARIOS. SERA IMPRESSO COMO LIDO  
C.... IQDRTE = QUADRANTE ACORDO GMM-3333  
C.... 1 = NE  
C.... 3 = SE  
C.... 5 = SW  
C.... 7 = NW  
C.... X1,Y1,Z1 = COORDENADAS CARTESIANAS GEODESICAS, EM METROS  
C.... XA,YA,ZA = VETORES QUE CONTEM AS COORDENADAS GEODESICAS  
C.... LOCAIS DOS PONTOS DE APOIO  
C  
C.... (AUX5,  
C.... AUX6,  
C.... AUX7) = COORDENADAS CARTESIANAS GEODESICAS DO PONTO ASSUMIDO COMO  
C.... ORIGEM DO SISTEMA LOCAL  
C  
C.... AUX1, = SENO E COSENO DA LATITUDE DO PONTO ASSUMIDO COMO ORIGEM  
C.... AUX2 DO SISTEMA LOCAL

```

C..... AUX3
C..... AUX4   = IDEM PARA LONGITUDE
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 LAT(5),LONG(5)
C
C
C..... DIMENSIONAMENTO DE VETORES E MATRIZES.
C
C..... DIMENSION CARTA (40 POSICOES).
C.....          NRPTO (NAPDIO)
C.....          LAT (NAPDIO)
C.....          LONG (NAPDIO)
C.....          H (NAPDIO)
C.....          VAR1 (NAPDIO)
C.....          VAR2 (NAPDIO)
C.....          XA (NAPDIO)
C.....          YA (NAPDIO)
C.....          ZA (NAPDIO)
C.....          IQDRTE (NAPDIO)
C.....          COMETA (80 POSICOES)
C
C
      DIMENSION CARTA(5),
-          NRPTO(5),
-          H(5),
-          VAR1(5),
-          VAR2(5),
-          XA(5),
-          YA(5),
-          ZA(5),
-          IQDRTE(5),
-          COMETA(10)
C
C
C..... DIMENSIONAMENTO MODULO 2
C
C..... DIMENSION XINST (NIMAGE)
C          YINST (NIMAGE)
C          NOFOTO(NIMAGE)
C          XFOTO (NIMAGE)
C          YFOTO (NIMAGE)
C.....          NRPTO2(NIMAGE)
C.....          PP(NIMAGE*2,NIMAGE*2)
C
C..... DIMENSIONAMENTO MODULO 2
C
      DIMENSION DELTAX(6),
-          AA(8,6),
-          AAT(6,8),
-          ATP(6,8),
-          XISO(6),
-          XISA(6),
-          ELE0(8),
-          ELEB(8),
-          ELE(8),
-          P(8,8),
-          PP(66,66),
-          AMFFID(8),
-          XINST(23),

```

```

-          YINST(33),
-          NCFCOT(33),
-          XFCTO(33),
-          YFCTO(33),
-          NRPTO2(33),
-          ENE(6,6),
-          U(6),
-          B(6)
C
  DIMENSION      V(8),
-                VT(1,8),
-                VTP(1,8),
-                FIDMVC(8,8),
-                STMVC(8,8),
-                D(8,8),
-                DT(8,8),
-                DSTMVC(8,8)
C
C..... DIMENSIONAMENTO MCDULO 4
  DIMENSION NRPTO3(3),
-          CREXLO(3,6),
-          NRPTO4(10),
-          PTECLO(10,3),
-          AM2(3,3),
-          ELEZRO(66),
-          ELI(66),
-          AAA(66,48),
-          AAAT(48,66),
-          AAATP(48,66),
-          ENI(48,48),
-          UU(48),
-          DLTAX(48),
-          XXA(48),
-          VV(66),
-          VVT(1,66),
-          VVTP(1,66)
C
  DATA IORIGE/0/,LEIT,IMPR/1,3/
C
C..... LEITURA DOS CABECALHOS DO TRABALHO
C
  READ(LEIT,10) (CCMETA(I),I=1,10)
10 FORMAT(10A8)
  WRITE(IMPR,20) (CCMETA(I),I=1,10)
20 FORMAT('1',///,10X,10A8)
C
  READ(LEIT,30) ONCART,(CARTA(I),I=1,5)
30 FORMAT(A8,1X,5A8)
  WRITE(IMPR,40) ONCART,(CARTA(I),I=1,5)
40 FORMAT('0',10X,'CARTA ',A8,5X,5A8)
C
C..... LEITURA DO ELIPSGIDE ADOTADO E SEUS PARAMETROS
C
  READ(LEIT,50) ELIPSE,A,E2
50 FORMAT(A8,1X,F9.1,1X,F11.9)
  WRITE(IMPR,60) ELIPSE
60 FORMAT('0',10X,'ELIPSGIDE ADOTADO ',A8)
C
C..... LEITURA DO NUMERO DE FCTGS, DE PONTOS DE APCIC, DE PONTOS
C..... AEROTRIANGULADOS E DE PONTOS IMAGEADOS

```

```

C
  READ(LEIT,70) NFOTCS,NAPCIC,NAERC,NIMAGE
  70 FORMAT(I2,1X,I2,1X,I3,1X,I3)
C
C.... IMPRESSAO DO CABECALHO RELATIVO AS COORDENADAS DOS PONTOS DE APOIO
C      A IMPRESSAO EH FEITA EM GRAUS-MINUTOS-SEGUNDOS
C
  WRITE(IMPR,75)
  75 FORMAT('0',10X,'RELACAO DOS PONTOS DE APOIO')
  WRITE(IMPR,80)
  80 FORMAT('0',10X,'NR PONTO',3X,'LATITUDE',10X,'LONGITUDE',11X,'ALTITUDE')
C
C.... LEITURA DOS PONTOS DE APOIO, SEUS NUMEROS, COORDENADAS E VARIANCIA
C
  DO 120 I=1,NAPOIC
    READ(LEIT,90) NRPTC(I),LAT(I),LONG(I),H(I),IQDRTE(I),VAR1(I),VAR2(I)
  90 FORMAT(I4,1X,F10.7,1X,F11.7,1X,F5.1,1X,I1,1X,2(F7.5,1X))
C
C.... CONVERSÃO EM GRAUS,MINUTOS E SEGUNDOS PARA FINS DE IMPRESSÃO
C
  CALL TRANS(NRPTC(I),LAT(I),LONG(I),H(I),IQDRTE(I),IMPR,8900)
C
C.... CONVERSÃO EM RADIANS
C.... O TERCEIRO ARGUMENTO EH DUMMY
C
  CALL GRAD(LAT(I),LONG(I),LCNG(I))
C
C.... OBTENÇÃO DE SENOS E COSENOS
C.... O SEGUNDO ARGUMENTO EH DUMMY, DESTINADO A SATISFAZER A
C.... RELACAO DE ARGUMENTOS DA CHAMADA A SUBROTINA
C
  CALL COSENC(LAT(I),LONG(I),LONG(I),SENLAT,COSLAT,SENLCN,COSLCN,SEN
-LCN,COSLCN)
C
C.... O PRIMEIRO PONTO DE APOIO (ICRIGE=0) EH ADOTADO COMO ORIGEM
C.... DO SISTEMA GEODESICO LOCAL
C
  IF(ICRIGE.EQ.0) GO TO 100
  ELSE
  GO TO 110
  100 AUX1=SENLAT
  AUX2=COSLAT
  AUX3=SENLCN
  AUX4=COSLCN
C
C.... CONVERSÃO DE LAT,LCN,H PARA COORDENADAS CARTESIANAS GEODESICAS
C.... (X1,Y1,Z1), EXPRESSAS EM METROS
C
  110 CALL TRANS1(SENLAT,COSLAT,SENLCN,COSLCN,A,E2,H(I),X1,Y1,Z1)
C
C.... CONVERSÃO DE (X1,Y1,Z1) EM NX,Y,Z, COORDENADAS GEODESICAS
C.... LOCAIS, EM METROS
C
  CALL TRANS2(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,X1,Y1,Z1,ICRIGE,AUX5,AUX6,AUX7,XA(
-I),YA(I),ZA(I))
  120 CONTINUE
C
C.... IMPRESSÃO DOS PONTOS DE APOIO EM COORDENADAS GEODESICAS LOCAIS

```

```

C
  WRITE(IMPR,130)
130 FORMAT('1',///,10X,'PONTOS DE APOIO EM COORDENADAS LOCAIS')
  WRITE(IMPR,135)
135 FORMAT('0',12X,'NR PONTO',12X,'X',12X,'Y',13X,'Z')

```

```

C
  DO 140 I=1,NAPOIC
  WRITE(IMPR,150) NRPTG(I),XA(I),YA(I),ZA(I)
140 CONTINUE
150 FORMAT(/7X,10X,I4,7X,3(F9.3,5X))

```

```

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C.... O MÓDULO 2 DESTINA-SE A CONVERTER AS COORDENADAS INSTRUMENTAIS
C.... DOS PONTOS IMAGEADOS, LIDAS NO AEROTRIANGULADOR WILD A-9 ,
C.... EM COORDENADAS FOTOGRAFICAS USANDO A TRANSFORMACAO AFIM.
C
C.... ADMITE-SE QUE ESTAO DISPONIVEIS AS COORDENADAS FIDUCIAIS DE
C.... QUATRO MARCAS FIDUCIAIS, O QUE PERMITE AJUSTAMENTO PELO MMQ.

```

```

C
C.... AA      = MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DO MODELO MATEMATICO
C....          EM RELACAO AOS PARAMETROS, NO PONTO XISO
C.... AAT      = TRANSPOSTA DE AA
C.... XISO     = VETOR DOS PARAMETROS APROXIMADOS
C.... DELTAX   = VETOR DAS CORRECCOES AOS PARAMETROS APROXIMADOS
C.... XISA     = VETOR DOS PARAMETROS AJUSTADOS
C.... ELEO     = FUNCAO (XISO)
C.... ELEB     = VETOR DAS COORDENADAS INSTRUMENTAIS DAS MARCAS FIDUCIAIS
C.... ELE      = ELEO - ELEB
C.... P        = MATRIZ DOS PESOS ATRIBUIDOS AS OBSERVACOES
C.... PP       = MATRIZ DOS PESOS DAS COORDENADAS FOTOGRAFICAS
C.... AMFFID   = VETOR DAS COORDENADAS FIDUCIAIS DAS MARCAS FIDUCIAIS
C.... XINST    = VETOR DAS COORDENADAS X (INSTRUMENTAIS)
C.... YINST    = VETOR DAS COORDENADAS Y (INSTRUMENTAIS) DOS PTOS IMAGEADO
C.... XFOTO    = VETOR DAS COORDENADAS X (FIDUCIAL E, APUS, FOTOGRAFICA)
C.... XFOTO    = VETOR DAS COORDENADAS Y (FIDUCIAL E, APUS, FOTOGRAFICA)
C.... XCAL,    = COORDENADAS FIDUCIAIS DO PTO PRINCIPAL
C.... YCAL     = COORDENADAS FIDUCIAIS DO PTO PRINCIPAL
C.... NRPTG2   = VETOR DOS NUMEROS DOS PONTOS IMAGEADOS
C.... IMG      = CONTADOR DE PONTOS IMAGEADOS
C.... A1,B1,
C.... C1,A2,
C.... B2,C2    = PARAMETROS PARA CONVERSAC DO SISTEMA INSTRUMENTAL
C....          PARA FIDUCIAL
C.... NRMF     = NUMERO DE MARCAS FIDUCIAIS
C.... EFE      = DISTANCIA FOCAL CALIBRADA (MM)
C.... DP1      = DESVIO PADRAO DAS OBSERVACOES INSTRUMENTAIS NO CASO
C....          DO WILD A-9, FORNECER 0,017 MM
C.... NRPTIM   = NUMERO DE PONTOS IMAGEADOS DE CADA FOTO
C.... NOFOTO    = VETOR QUE ACUMULA NUMERO DAS FOTOS DOS PTOS IMAGEADOS
C.... NCMF     = NUMERO DA MARCA FIDUCIAL
C.... MFFOTO    = NUMERO DA FOTO CORRESPONDENTE AAS MARCAS FIDUCIAIS
C

```



```
C.... AS COORDENADAS DOS PUNTOS IMAGEADOS, EM QUALQUER SISTEMA, SAO
C.... EXPRESSAS EM MILIMETROS (MM)
C
C.... O MCDULO PREVE DISPONIBILIDADE DE 4 MARCAS FIDUCIAIS. CASO ISTO
C.... NAO OCORRA, O PROGRAMA EH ENCERRADO
C
C.... AS MARCAS FIDUCIAIS SAO LIDAS NA SEQUENCIA INDICADA NA MONOGRAFIA
C.... CITADA
C
C.... LEITURA VALORES DE CALIBRACAO
C
      READ(LEIT,200)XCAL,YCAL,EFE
C
C.... LEITURA VALORES APROXIMADOS DOS PARAMETROS
      200 FORMAT(3(F8.3,1X))
C
      READ(LEIT,205)(XISC(I),I=1,6)
      205 FORMAT(6(F5.1,1X))
C
C.... LEITURA DO DESVIO PADRAO DAS OBSERVACOES INSTRUMENTAIS
C
      READ(LEIT,210)DP1
      210 FORMAT(F5.3)
C
      IMG=1
      NALXPI=0
      I11=NIMAGE*2
      DO 212 I9=1,I11
      DO 212 I8=1,I11
      PP(I9,I8)=C.DO
      212 CONTINUE
      DO 299 I=1,NFCTOS
C
C.... MONTAGEM DA MATRIZ DOS PESCS
C
      DO 215 J1=1,8
      DO 215 J2=1,8
      P(J1,J2)=C.DO
      215 CONTINUE
      DO 216 J1=1,8
      P(J1,J1)=1.DO/(DP1**2)
      216 CONTINUE
C
      READ(LEIT,220)NRMF,NRPTIM
      220 FORMAT(I1,1X,I2)
      IF(NRMF.NE.4) GO TO 900
C
      ELSE
C.... LEITURA DO NUMERO DA FCTC, COORDENADAS INSTRUMENTAIS E FIDUCIAIS
C.... DAS MARCAS FIDUCIAIS
C
      DO 235 I1=1,NRMF
      READ(LEIT,222)MFFCTC,NCMF,ELEB(I1*2-1),ELEB(I1*2),AMFFID(I1*2-1),A
      MFFID(I1*2)
      222 FORMAT(I2,1X,I1,1X,4(F8.3,1X))
      IF(I1.EQ.1) GO TO 225
C
      ELSE
      GO TO 229
      225 WRITE(IMPR,226)
      226 FORMAT('1',///,10X,'COORDENADAS DAS MARCAS FIDUCIAIS')
      WRITE(IMPR,227)
```

```

227 FORMAT('0',35X,'INSTRUMENTAIS(MM)',6X,'FIDUCIAIS(MM)')
      WRITE(IMPR,228)
228 FORMAT('0',10X,'NR FOTO',5X,'NR FIDUCIAL',5X,'X',10X,'Y',10X,'X',1
      -OX,'Y')
229 WRITE(IMPR,230) MFFOTO,NCMF,ELEB(I1*2-1),ELEB(I1*2),AMFFID(I1*2-1)
      -,AMFFID(I1*2)
230 FORMAT(/,14X,I2,14X,I1,4X,4(F8.3,4X))
235 CONTINUE
C
C.... OBTENCAO DOS PARAMETROS DE TRANSFORMACAO
C
C.... CALCULO DE ELEO
C
      DO 250 I2=1,8,2
      ELE0(I2)=XISO(1)+XISO(2)*AMFFID(I2)+XISO(3)*AMFFID(I2+1)
      ELE0(I2+1)=XISO(4)+XISO(5)*AMFFID(I2)+XISO(6)*AMFFID(I2+1)
250 CONTINUE
C
      DO 255 I3=1,8
      ELE(I3)=ELE0(I3)-ELEB(I3)
255 CCNTINUE
C
C.... MONTAGEM DA MATRIZ A
C
      DATA AA/48*C.DO/
C
      DO 260 I4=1,8,2
      AA(I4,1)=1.
      AA(I4,2)=AMFFID(I4)
      AA(I4,3)=AMFFID(I4+1)
      AA(I4+1,4)=1.
      AA(I4+1,5)=AMFFID(I4)
      AA(I4+1,6)=AMFFID(I4+1)
260 CCNTINUE
C
C.... FORMACAO DE AT
C
      DO 265 I5=1,8
      DO 265 I6=1,6
      AAT(I6,I5)=AA(I5,I6)
265 CCNTINUE
C
C.... OBTENCAO DE N=(AT*P*AA)-1
C
      CALL AB(AAT,P,ATP,6,8,8)
      CALL AB(ATP,AA,ENE,6,8,6)
      CALL VERSOL(ENE,B,6)
C
C.... OBTENCAO DE L=AT*P*L
C
      CALL AB(ATP,ELE,L,6,8,1)
C
C.... OBTENCAO DE X=-N-1 * U
C
      CALL AB(ENE,U,DELTAX,6,6,1)
      DO 270 I7=1,6
      DELTAX(I7)=-DELTAX(I7)
      XISA(I7)=XISO(I7)+DELTAX(I7)
270 CONTINUE
C

```

C.... OBTENCAO DOS PARAMETROS DA TRANSFORMACAO INSTRUMENTAL PARA  
C.... FIDUCIAL

AAUX6=(XISA(5)\*XISA(3)-XISA(2)\*XISA(6))  
A1=(XISA(1)\*XISA(6)-XISA(4)\*XISA(3))/AAUX6  
B1=-(XISA(6)/AAUX6)  
C1=(XISA(3)/AAUX6)  
A2=(XISA(4)\*XISA(2)-XISA(1)\*XISA(5))/AAUX6  
B2=(XISA(5)/AAUX6)  
C2=-(XISA(2)/AAUX6)

C  
C.... LEITURA DAS COORDENADAS INSTRUMENTAIS DOS PNTCS IMAGEADOS  
C.... PASSAGEM PARA COORDENADAS FIDUCIAIS

C  
DC 285 I6=1,NRPT1M  
READ(LEIT,272) NOFOTO(IMG),NRPTC2(IMG),XINST(IMG),YINST(IMG)  
272 FORMAT(I4,1X,I4,1X,2(F8.3,1X))

C  
XFOTO(IMG)=A1+B1\*XINST(IMG)+C1\*YINST(IMG)  
YFOTO(IMG)=A2+B2\*XINST(IMG)+C2\*YINST(IMG)  
XFCTO(IMG)=XFOTO(IMG)-XCAL  
YFCTO(IMG)=YFOTO(IMG)-YCAL  
IF(I6.EQ.1) GO TO 275

C  
ELSE  
GO TO 278

275 WRITE(IMPR,276)  
276 FORMAT(/////,10X,'NR FCTO',5X,'NR PCNTC',5X,'INSTRUMENTAIS(MM)',15  
-X,'FOTOGRAFICAS(MM)')  
WRITE(IMPR,277)  
277 FORMAT('O',37X,'X',10X,'Y',10X,'X',10X,'Y')  
278 WRITE(IMPR,280)NOFOTO(IMG),NRPTC2(IMG),XINST(IMG),YINST(IMG),XFOTO  
-(IMG),YFOTO(IMG)  
280 FORMAT(/,13X,I4,8X,I4,5X,4(F8.3,4X))  
IF(IMG.GT.NIMAGE) GO TO 900  
C  
ELSE  
IMG=IMG+1  
285 CONTINUE

C  
C  
C.... ANALISE ESTATISTICA DO AJUSTAMENTO

C  
C.... V = VETOR DOS RESIDUOS  
C.... VT = TRANSPOSTA DE V  
C.... SIGMAQ = VARIANCIA DAS CBS DE PESO UNITARIO, A POSTERIORI  
C.... FIDMVC = MV-C DAS COORDENADAS FIDUCIAIS  
C.... STMVC = MV-C DAS COORDENADAS INSTRUMENTAIS  
C.... D = MATRIZ DAS DERIVADAS DO MODELO MATEMATICO QUE LIGA AS  
C.... COORDENADAS INSTRUMENTAIS E FIDUCIAIS

C  
C.... CALCULO DE V=AA\*DELTAX+ELE

C  
CALL AB(AA,DELTAX,V,8,6,1)

C  
C  
WRITE(IMPR,287)  
287 FORMAT(/////,13X,'VETOR DOS RESIDUOS (TRANSF. DE COORDENADAS)').  
DO 289 I1=1,8  
V(I1)=V(I1)+ELE(I1)  
WRITE(IMPR,288) V(I1)  
288 FORMAT(/,15X,F8.4)  
289 CONTINUE

C

C..... CALCULO DE SIGMAQ=(VT\*P\*V)/2

C

DO 290 I2=1,8

VT(1,I2)=V(I2)

290 CONTINUE

C

CALL AB(VT,P,VTP,1,8,8)

CALL AB(VTP,V,SIGMAQ,1,8,1)

SIGMAQ=SIGMAQ/2.DC

WRITE(IMPR,291) SIGMAQ

291 FORMAT('-',10X,'VARIANCIA DA OBS DE PESO UNITARIO,A POSTERIORI = ',  
-,F8.3)

C

C..... CALCULO DA MV-C DAS COORDENADAS FIDUCIAIS

C..... MONTAGEM DA MATRIZ D

C

DATA D/64\*C.DC/

DO 292 I3=1,8,2

D(I3,I3)=B1

D(I3,I3+1)=C1

D(I3+1,I3)=B2

D(I3+1,I3+1)=C2

292 CONTINUE

C

C..... MONTAGEM DE DT

DO 293 I4=1,8

DO 293 I5=1,8

DT(I5,I4)=D(I4,I5)

293 CONTINUE

C

C..... MONTAGEM DA MV-C DAS COORDENADAS INSTRUMENTAIS

C

DATA STMVC/64\*C.DC/

DO 294 I6=1,8

STMVC(I6,I6)=DP1\*\*2

294 CONTINUE

C

C..... CALCULO DE FIDMVC=D\*STMVC\*DT

C

CALL AB(D,STMVC,DSTMVC,8,8,8)

CALL AB(DSTMVC,DT,FIDMVC,8,8,8)

CALL VERSCL(FIDMVC,B,8)

C

C..... OBTENCAO DA MATRIZ DOS PESOS DAS COORDENADAS FIDUCIAIS

C

DO 295 I7=1,8

DO 295 I8=1,8

P(I7,I8)=SIGMAQ\*FIDMVC(I7,I8)

295 CONTINUE

C

C..... MONTAGEM DA MATRIZ DOS PESOS DAS COORDENADAS FOTOGRAFICAS

C

DO 297 I2=1,NRPTIM

I2C=I2+NAUXPI

PP(I2C\*2-1,I2C\*2-1)=P(1,1)

PP(I2C\*2-1,I2C\*2)=P(1,2)

PP(I2C\*2,I2C\*2-1)=PP(I2C\*2-1,I2C\*2)

PP(I2C\*2,I2C\*2)=P(1,1)

297 CONTINUE

NAUXPI=NAUXPI+NRPTIM

```
C
      WRITE(IMPR,302)
302  FORMAT(' ',10X,'MATRIZ DCS PESCS-COORD. FOTOGRAFICAS')
      DO 298 I1=1,8
      WRITE(IMPR,301)(P(I1,I2),I2=1,8)
301  FORMAT('/',10X,8(F11.3,2X))
298  CONTINUE
299  CONTINUE

C
C
C.... IMPRESSAO DA MATRIZ PP
C
      WRITE(IMPR,960)
960  FORMAT('1 ',10X,'MATRIZ P')
      DO 961 I=1,I11
      WRITE(IMPR,469) (PP(I,J),J=1,I11)
469  FORMAT('/',1X,12(F10.3,1X))
961  CONTINUE

C
C
C
C
C
C
C
C
C.... O MCDULO TRES DESTINA-SE A CORRIGIR ERROS SISTEMATICOS
C....      ZS = ALTITUDE DO AVIAO EM QUILOMETROS
C....      ZP = ALTITUDE MEDIA DO TERRENO , EM QUILOMETROS
C
C.... CORRECAO DA DISTORCAO OPTICA
C
      CALL DISTR

C
C.... CORRECAO DA REFRACAO ATMOSFERICA
C
      READ(LEIT,305)ZS,ZP
305  FORMAT(2(F6.3,1X))
      CALL REFRAQ(XFOTC,YFOTC,NIMAGE,EFE,ZS,ZP)

C
C.... IMPRESSAO DAS COORDENADAS FOTOGRAFICAS APOS REFINAMENTO DA IMAGEM
C
      WRITE(IMPR,310)
310  FORMAT('////',10X,'COORDENADAS FOTOGRAFICAS APOS REFINAMENTO DA IMAG
-EM')
      WRITE(IMPR,320)
320  FORMAT('/',10X,'NR FOTO',5X,'NR PONTO',8X,'X',10X,'Y')

      DO 340 I=1,NIMAGE
      WRITE(IMPR,330) NUFOTO(I),NRPTO2(I),XFCTC(I),YFCTC(I)
330  FORMAT('/',13X,I4,8X,I4,4X,2(F8.3,4X))
340  CONTINUE

C
C
C
C
C
C
C.... MCDULO 4
```

```

C
C.... O PROPOSITO DO MODULO 4 EH REALIZAR SIMULTANEAMENTE A AEROTRIAN-
C.... GULACAO E O AJUSTAMENTO. OS CONCEITOS AQUI EMPREGADOS
C.... ESTAO EXPLICITADOS NA MONOGRAFIA CITADA.
C
C.... NRPT03 = VETOR QUE ARMAZENA OS NUMEROS DAS FOTOS RELATIVAS AOS
C.... VALORES ESTIMADOS DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO EXT.
C.... OREXLO = MATRIZ DOS VALORES ESTIMADOS DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO
C.... EXTERNA. A SEQUENCIA POR LINHA EH X0,Y0,Z0,W,
C.... FI,CA.
C.... NRPT04 = VETOR QUE ARMAZENA OS NUMEROS RELATIVOS AOS PONTOS DO
C.... ESPACO-OBJETO CUJAS COORDENADAS SE DESEJA.
C.... PTEOLO = MATRIZ DOS VALORES ESTIMADOS DAS COORDENADAS SE GEODESICAS
C.... LOCAIS DOS PONTOS AEROTRIANGULADOS DO ESPACO
C.... OBJETO.A SEQUENCIA POR LINHA EH X,Y,Z.
C.... ELEZRO = VETOR QUE ARMAZENA OS VALORES DAS COORDENADAS FOTOGRA-
C.... FICAS OBTIDOS COM O EMPREGO DOS PARAMETROS ESTIMADOS
C.... ELI = ELEZRO - XFGTC (OU YFGTC)
C.... AAA = MATRIZ DAS DERIVADAS PARCIAIS DO MODELO MATEMATICO EM
C.... RELACAO AOS PARAMETROS
C.... AAAT = TRANSPOSTA DE AAA
C.... INTER = NUMERO DE INTERACOES
C
C.... DIMENSICN NRPT03 (NFOTCS),
C.... OREXLO (NFOTCS,6),
C.... NRPT04 (NAERC),
C.... PTEOLO (NAERC,3),
C.... ELEZRO (NIMAGE*2),
C.... ELI (NIMAGE*2),
C.... AAA (NIMAGE*2,NFOTCS*6+NAERC*3),
C.... DLTAX (NFOTCS*6+NAERC*3),
C.... XXA (NFOTCS*6+NAERC*3)
C
C.... LEITURA DOS VALORES ESTIMADOS DOS PARAMETROS
C.... MEDIDAS LINEARES EM METROS
C.... MEDIDAS ANGULARES EM GRAUS E DECIMOS
C
C.... PARAMETROS RELATIVOS A ORIENTACAO EXTERNA
C.... SEQUENCIA-X0-Y0-Z0-W-FI-CA DE TODAS AS FOTOS NA MESMA
C.... ORDEM EM QUE EH FEITA A AT.
C
      DO 435 I1=1,NFOTCS
      READ(LEIT,405) NRPT03(I1),(OREXLO(I1,I),I=1,6)
405  FORMAT(I2,1X,6(F10.3,1X))
      IF(I1.EQ.1) GO TO 410
C      ELSE
      GO TO 442
410  WRITE(IMPR,415)
415  FORMAT('1',///,10X,'PARAMETROS APROXIMADOS')
      WRITE(IMPR,420)
420  FORMAT('0',10X,'NR FOTC',10X,'X0',16X,'Y0',16X,'Z0',16X,'W',16X,'F
-1',16X,'K')
442  WRITE(IMPR,425) NRPT03(I1),(OREXLO(I1,I),I=1,6)
425  FORMAT(//,13X,I2,6(8X,F10.3))
C
C.... CONVERSAO PARA RADIANS
C
430  CALL GRAD(CREXLO(I1,4),CREXLO(I1,5),OREXLO(I1,6))
435  CONTINUE
C

```

C.... LEITURA DOS PARAMETROS RELATIVOS AOS PCNTCS DO ESPACO-OBJETO

C

```

WRITE(IMPR,44C)
440 FORMAT('O',10X,'NR PONTO',10X,'X',16X,'Y',16X,'Z')
DO 448 I2=1,NAERO
READ(LEIT,445) NRPT04(I2),(PTECLO(I2,I),I=1,3)
445 FORMAT(I2,1X,3(F10.3,1X))
WRITE(IMPR,446) NRPT04(I2),(PTECLO(I2,I),I=1,3)
446 FORMAT('/',13X,I2,3(8X,F10.3))
448 CONTINUE
I10=NFOTCS*6+NAERO*3
INTER=0

```

C

```

DO 441 J3=1,I11
DO 441 J4=1,I10
AAA(J3,J4)=C.DO
441 CONTINUE
449 DO 466 I3=1,NIMAGE
DO 450 I4=1,NFOTCS
IF(NOFOTO(I3).EQ.NRPT03(I4)) GO TO 452
450 CONTINUE
GO TO 900

```

C

C.... SAIDA POR SOC SIGNIFICA INCONSISTENCIA (NAC ENCONTRADO NR DA FOTO)

C

```

452 CALL COSENG(CREXLO(I4,4),CREXLO(I4,5),CREXLO(I4,6),SENW,COSW,SENF I
-,CCSFI,SENK,COSK)
CALL MRCT2(SENW,COSW,SENF I,COSFI,SENK,CCSK,AM2)
DO 454 I5=1,NAERO
IF(NRPT02(I3).EQ.NRPT04(I5)) GO TO 460
454 CONTINUE
DO 456 I6=1,NAPOIC
IF(NRPT02(I3).EQ.NRPT0(I6)) GO TO 462
456 CONTINUE
GO TO 900
460 CALL MNQ(PTECLO(I5,1),PTECLO(I5,2),PTECLO(I5,3),OREXLO(I4,1),OREXL
-O(I4,2),OREXLO(I4,3),AM2,AM,AN,AQ)
CALL DERIVX(EFE,SENK,CCSW,SENF I,CCSFI,SENK,COSK,OREXLO(I4,1),OREXL
-O(I4,2),OREXLO(I4,3),PTECLO(I5,1),PTECLO(I5,2),PTECLO(I5,3),AM2,AM
-,AN,AQ,AAA(I3*2-1,I4*6-5),AAA(I3*2-1,I4*6-4),AAA(I3*2-1,I4*6-3),AA
-A(I3*2-1,I4*6-2),AAA(I3*2-1,I4*6-1),AAA(I3*2-1,I4*6),AAA(I3*2-1,NF
-OTCS*6+I5*3-2),AAA(I3*2-1,NFOTCS*6+I5*3-1),AAA(I3*2-1,NFOTCS*6+I5*
-3))
CALL DERIVY(EFE,SENK,CCSW,SENF I,CCSFI,SENK,COSK,OREXLO(I4,1),OREXL
-O(I4,2),OREXLO(I4,3),PTECLO(I5,1),PTECLO(I5,2),PTECLO(I5,3),AM2,AM
-,AN,AQ,AAA(I3*2,I4*6-5),AAA(I3*2,I4*6-4),AAA(I3*2,I4*6-3),AAA(I3*2
-,I4*6-2),AAA(I3*2,I4*6-1),AAA(I3*2,I4*6),AAA(I3*2,NFOTOS*6+I5*3-2)
-,AAA(I3*2,NFOTOS*6+I5*3-1),AAA(I3*2,NFOTCS*6+I5*3))
GO TO 465

```

C

```

462 CALL MNQ(XA(I6),YA(I6),ZA(I6),CREXLO(I4,1),CREXLO(I4,2),OREXLO(I4,
-3),AM2,AM,AN,AQ)
CALL DERIVX(EFE,SENK,CCSW,SENF I,CCSFI,SENK,COSK,OREXLO(I4,1),OREXL
-O(I4,2),OREXLO(I4,3),XA(I6),YA(I6),ZA(I6),AM2,AM,AN,AQ,AAA(I3*2-1,
-I4*6-5),AAA(I3*2-1,I4*6-4),AAA(I3*2-1,I4*6-3),AAA(I3*2-1,I4*6-2),A
-AA(I3*2-1,I4*6-1),AAA(I3*2-1,I4*6),AAUX3,AAUX3,AAUX3)

```

C

C.... OS TRES ULTIMOS ARGUMENTOS SAO DUMMY

C

```

CALL DERIVY(EFE,SENK,CCSW,SENF I,CCSFI,SENK,CCSK,CREXLO(I4,1),OREXL

```

```

-0(I4,2),OREXLO(I4,3),XA(I6),YA(I6),ZA(I6),AM2,AM,AN,AQ,AAA(I3*2,I4
-*6-5),AAA(I3*2,I4*6-4),AAA(I3*2,I4*6-3),AAA(I3*2,I4*6-2),AAA(I3*2,
-I4*6-1),AAA(I3*2,I4*6),AAUX3,AAUX3,AAUX3)

```

```

C
C..... OS TRES ULTIMOS ARGUMENTOS SAC DUMMY
C

```

```

465 ELEZRO(I3*2-1)=(-EFE)*(AM/AQ)
ELEZRO(I3*2)=(-EFE)*(AN/AQ)

```

```

C
C..... CALCULO DE L=L0-LB
C

```

```

ELI(I3*2-1)=ELEZRO(I3*2-1)-XFOTC(I3)
ELI(I3*2)=ELEZRO(I3*2)-YFOTO(I3)

```

```

466 CONTINUE

```

```

C
C
WRITE(IMPR,610)
610 FORMAT('1',10X,'VETOR L0')
DC 620 IM=1,NIMAGE
IM1=IM*2-1
IM2=IM*2
WRITE(IMPR,615) ELEZRO(IM1),ELEZRO(IM2)
615 FORMAT(/,10X,2(F8.3,4X))
620 CONTINUE

```

```

PROVS
PROVS
PROVS
PROVS
PROVS
PROVS

```

```

C
C
C
C..... MONTAGEM DA TRANSPCSTA DE AAA
C

```

```

DC 475 I7=1,I11
DC 475 I8=1,I10
AAAT(I8,I7)=AAA(I7,I8)

```

```

475 CONTINUE

```

```

C
C..... OBTENCAO DE ENI=(AAAT*PP*AAA)-1
C

```

```

CALL AB(AAAT,PP,AAATP,I10,I11,I11)

```

```

C
CALL AB(AAATP,AAA,ENI,I10,I11,I10)

```

```

C
IF(DABS(ENI(1,1)).LT.1.E-50) GO TO 900

```

```

C
CALL INVRTN(ENI,I10)

```

```

C
C..... OBTENCAO DE LL=AAAT*PP*ELI
C

```

```

CALL AB(AAATP,ELI,UU,I10,I11,1)

```

```

C
C..... OBTENCAO DE XX=-(ENI(-1)*LL)
C

```

```

CALL AB(ENI,UU,DLTAX,I10,I10,1)

```

```

I7=0

```

```

DC 476 I8=1,NFOTGS

```

```

DC 476 I9=1,6

```

```

I7=I7+1

```

```

DLTAX(I7)=-DLTAX(I7)

```

```

XXA(I7)=OREXLO(I8,I9)+DLTAX(I7)

```

```

OREXLO(I8,I9)=XXA(I7)

```

```

476 CONTINUE

```

```

C

```



```

      WRITE(IMPR,477)
477  FORMAT('1',//,10X,'PARAMETROS DE ORIENTACAO EXTERNA',//,10X,'ANGULO
-S EM RADIANS , COORDENADAS NO SISTEMA LOCAL',//,10X,'NR FOTO',6X,
-'X0',9X,'Y0',10X,'Z0',13X,'W',10X,'FI',11X,'K')
      DO 479 I=1,NFOTOS
      WRITE(IMPR,478) NRPT03(I),(OREXLO(I,I2),I2=1,6)
478  FORMAT(/,12X,I4,3X,6(F10.3,2X))
479  CONTINUE
C
      I7=NFOTOS*6
      DO 480 I8=1,NAERO
      DO 480 I9=1,3
      I7=I7+1
      DLTAX(I7)=-DLTAX(I7)
      XXA(I7)=PTEGLO(I8,I9)+DLTAX(I7)
      PTEGLO(I8,I9)=XXA(I7)
480  CONTINUE
      WRITE(IMPR,481)
481  FORMAT(////,10X,'PONTOS DO ESPACO OBJETO-COORDENADAS LOCAIS',//,10
-X,'NR PONTO',10X,'X',10X,'Y',10X,'Z')
      DO 483 I=1,NAERO
      WRITE(IMPR,482) NRPT04(I),(PTEGLO(I,I2),I2=1,3)
482  FORMAT(/,12X,I4,6X,3(F10.3,2X))
483  CONTINUE
C
      DO 484 I=1,I10
      IF(DABS(DLTAX(I)).GT.1.D-3) GO TO 485
484  CONTINUE
      GO TO 486
485  INTER=INTER+1
      IF(INTER.GT.9) GO TO 900
C
C.... INCONSISTENCIA - NAO HOUVE CONVERGENCIA
C
C      ELSE
C      GO TO 449
486  WRITE(IMPR,487) INTER
487  FORMAT(//,10X,'*** OBTIDA CONVERGENCIA NA INTERACAO',1X,I2)
C
C
C
C
C.... ANALISE ESTATISTICA DA AEROTRIANGULACAO/AJUSTAMENTO
C
C....      VV = VETOR DOS RESIDUOS
C....      VVT = TRANSPOSTA DE VV
C
C....      DIMENSIONAMENTO
C....      DIMENSION      VV (NIMAGE*2),
C....      VVT (1,NIMAGE*2),
C....      VVTP (1,NIMAGE*2)
C....      CALCULO DE VV=AAA*DLTAX+ELI
C
C      CALL AB(AAA,DLTAX,VV,I11,I10,1)
C
      WRITE(IMPR,490)
490  FORMAT(////,13X,'VETOR DOS RESIDUOS (AT/AJUSTAMENTO)')
      DO 492 I=1,I11
      VV(I)=VV(I)+ELI(I)
      WRITE(IMPR,491) VV(I)

```

```

491 FORMAT(/,15X,D10.3)
492 CONTINUE
C
C....    IMPRESSAO DA MV-C DCS PARAMETROS AJUSTADOS
C
      WRITE(IMPR,493)
493 FORMAT(///,13X,'MATRIZ VARIANCIA-CCVARIANCIA (PARAMETROS AJUSTADOS
-)' )
      DO 495 I=1,I10
      WRITE(IMPR,494) (ENI(I,J),J=1,I10)
494 FORMAT(/,1X,12(D10.3,1X))
495 CONTINUE
C
C....    CALCULO DE SIGMAQ = (VVT*PP*VV)/(I11-I10)
C
      DO 496 I=1,I11
      VVT(1,I)=VV(1)
496 CONTINUE
C
      CALL AB(VVT,PP,VVTP,1,I11,I11)
      CALL AB(VVTP,VV,SIGMAQ,1,I11,1)
      SIGMAQ=SIGMAQ/(I11-I10)
      WRITE(IMPR,291) SIGMAQ
C
C
C
C
C
C....    O MODULO 5 DESTINA-SE A IMPRIMIR OS RESULTADOS OBTIDOS DURANTE
C....    A FASE DE AT/AJUSTAMENTO
C
C
C....    IMPRESSAO DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO EXTERNA
C....    MEDIDAS LINEARES EM METROS
C....    MEDIDAS ANGULARES EM GRAUS E DECIMOS
C
      WRITE(IMPR,510)
510 FORMAT('1',///,10X,'RESULTADOS AEROTRIANGULACAO',///,10X,'NR FOTO'
-,10X,'X0',16X,'Y0',16X,'Z0',16X,'W',16X,'F1',16X,'K')
      DO 520 I1=1,NFOTOS
      CALL RADGRA(CREXLO(I1,4),CREXLO(I1,5),CREXLO(I1,6))
      WRITE(IMPR,515) NRPT03(I1),(CREXLO(I1,1),I=1,6)
515 FORMAT(//,13X,12,6(8X,F10.3))
520 CONTINUE
C
C....    IMPRESSAO DAS COORDENADAS DOS PONTOS AEROTRIANGULADOS
C
      WRITE(IMPR,530)
530 FORMAT(/////,10X,'NR PONTO',3X,'LATITUDE',10X,'LONGITUDE',11X,'ALT
-ITUDE')
      DO 540 I2=1,NAERC
      CALL TRANS3(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,PTCLO(I2,1),PTCLO(I2,2),PTCLO(I
-2,3),AUX5,AUX6,AUX7,X1,Y1,Z1)
      CALL TRANS4(X1,Y1,Z1,A,E2,PTCLO(I2,1),PTCLO(I2,2),PTCLO(I2,3),&
-900)
      CALL TRANS(NRPT04(I2),PTCLO(I2,1),PTCLO(I2,2),PTCLO(I2,3),IQDRT
-E(1),IMPR,8900)
540 CONTINUE
C

```

```
      WRITE(IMPR,550)
550  FORMAT('C',5CX,'****FINAL DE PROGRAMA****')
      STOP
900  PRINT 910
910  FORMAT('-',10X,'DETETADA INCONSISTENCIA CCS DADOS')
      STOP
      END
```

```

      SUBROUTINE GRAD(ANGLO1,ANGLO2,ANGLO3)
C
C..... SUBROTINA TRANSFORMA ANGULOS FORNECIDOS EM GRAUS E DECIMOS -
C..... PARA RADIANDS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      RAC=31415926535.D-10/180.D0
      ANGLO1=ANGLO1*RAD
      ANGLO2=ANGLO2*RAD
      ANGLO3=ANGLO3*RAD
C
      RETURN
      END
```

```
SUBROUTINE COSENG(K,FI,CA,SENW,CCSW,SENF1,COSFI,SENK,COSK)
```

```
C  
C SUBROTINA RECEBE OS ANGULOS K,FI E CA(K), EM RADIANDOS  
C DEVOLVE OS SENOS E COSENGS DESSES 3 ANGULOS  
C AO PROGRAMA QUE CHAMOU
```

```
C  
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
C  
SENW = DSIN(K)  
CCSW = DCCS(K)  
SENF1= DSIN(FI)  
COSFI= DCCS(FI)  
SENK = DSIN(CA)  
COSK = DCCS(CA)
```

```
C  
RETURN  
END
```

```

SUBROUTINE TRANS1(SENLAT,CCSLAT,SENLCN,CCSLCN,A,E2,H,X1,Y1,Z1)
C
C.....SUBROTINA EFETUA TRANSFORMACAO COORDENADAS GEODESICAS
C      ELIPSOIDICAS (LAT, LONG, H) PARA COORDENADAS CARTESIANAS
C      GEODESICAS (X1, Y1, Z1) , EXPRESSAS EM METROS
C
C      PARA DEFINICAO SISTEMAS COORDENADAS VEJA MONOGRAFIA
C
C      A = SEMI-EIXO MAIOR DO ELIPSOIDE ADOTADO (EM METROS)
C      ENE= GRANDE NORMAL
C      E2 = EXCENTRICIDADE DO ELIPSOIDE ADOTADO
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
C
C      SENF12 = SENLAT**2
C
C      ENE = A/DSQRT(1-E2*SENF12)
C
C      X1 = (ENE+H)*COSLAT*COSLCN
C      Y1 = (ENE+H)*COSLAT*SENLCN
C      Z1 = (ENE*(1-E2)+H)*SENLAT
C
C      RETURN
C      END
    
```

SUBROUTINE TRANS2(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,X1,Y1,Z1,ICRIGE,AUX5,AUX6,AUX7,X,Y,Z)

```
C
C      SUBROUTINE EFETUA TRANSFORMACAO COORDENADAS CARTESIANAS
C      GEODESICAS (X1,Y1,Z1) PARA COORDENADAS GEODESICAS LOCAIS (X,Y,Z)
C      TODAS COORDENADAS EXPRESSAS EM METROS
C
C      PRIMEIRO PONTO DE APOIO E ASSUMIDO COMO ORIGEM SISTEMA LOCAL
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C      IF(ICRIGE.EQ.0) GO TO 10
C          ELSE
C      GO TO 20
10  AUX5=X1
    AUX6=Y1
    AUX7=Z1
C
20  X=(-AUX3*(X1-AUX5)+AUX4*(Y1-AUX6))
    Y=(-AUX1*AUX4*(X1-AUX5)-AUX1*AUX3*(Y1-AUX6)+AUX2*(Z1-AUX7))
    Z=(AUX2*AUX4*(X1-AUX5)+AUX2*AUX3*(Y1-AUX6)+AUX1*(Z1-AUX7))
C
    ICRIGE=1
C
    RETURN
    END
```

```
SUBROUTINE TRANS(NRPTC,LAT1,LCNG1,H,IQDRTE,IMPR,*)
```

```
C
C  SUBROTINA CONVERTE VALORES FORNECIDOS EM GRAUS E DECIMOS
C  EM GRAUS-MINUTOS-SEGUNDOS E REALIZA IMPRESSAO
```

```
C  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C  REAL*8 LAT1,LCNG1
```

```
C
C  IAUX1=LAT1
C  IAUX2=((LAT1-IAUX1)*60.D0)
C  AAUX3=((LAT1-IAUX1)*60.D0)-IAUX2)*60.D0
C  IAUX4=LCNG1
C  IAUX5=((LCNG1-IAUX4)*60.D0)
C  AAUX6=((LCNG1-IAUX4)*60.D0)-IAUX5)*60.D0
```

```
C  IF(AAUX3.LT.59996.D-3) GO TO 2
```

```
C  ELSE
```

```
C  AAUX3=DABS(AAUX3-60.D0)
```

```
C  IAUX2=IAUX2+1
```

```
C  2 IF(AAUX6.LT.59996.D-3) GO TO 5
```

```
C  ELSE
```

```
C  AAUX6=DABS(AAUX6-60.D0)
```

```
C  IAUX5=IAUX5+1
```

```
C  5 IF(IQDRTE.EQ.5) GO TO 10
```

```
C  ELSE
```

```
C  GO TO 30
```

```
10 WRITE(IMPR,2C)NRPTC,IAUX1,IAUX2,AAUX3,IAUX4,IAUX5,AAUX6,H
```

```
20 FORMAT(/13X,I4,5X,I2,'-',I2,'-',F5.2,1X,'S',4X,I3,'-',I2,'-',F5.2,
-1X,'W',7X,F5.1)
```

```
RETURN
```

```
30 RETURN 1
```

```
END
```



```
SUBROUTINE AB(A,B,R,L,M,N)
```

```
C
C  SUBROTINA DISPONIVEL UFPR
C  DESTINA-SE EFETUAR MULTIPLICACAO DE MATRIZES
C  R=A*B
```

```
C
C  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C  DIMENSION A(L,M),B(M,N),R(L,N)
```

```
C
C  DO 5 I=1,L
C  DO 5 J=1,N
C  R(I,J)=0.00
C  DO 5 K=1,M
C  5 R(I,J)=R(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
```

```
C
C  RETURN
C  END
```

```
SUBROUTINE VERSOL(A,B,I)
```

```
C
C  SUBROTINA DISPONIVEL UFPR
C      DESTINA-SE OBTER INVERSA MATRIZ A
C      QUANDO CHAMADA A SR, A EH A MATRIZ CUJA INVERSA SE DESEJA
C      QUANDO RETORNA AO PROGRAMA QUE CHAMOU A EH A INVERSA
C      B = VETOR AUXILIAR
C      I = DIMENSOES DE A E B
C
```

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION A(I,I),B(I)
```

```
IF(I.EQ.1) GO TO 10
```

```
C      ELSE
```

```
IM=I-1
```

```
DO 5 K=1,I
```

```
DO 2 J=1,IM
```

```
2 B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)
```

```
B(1)=1.00/A(1,1)
```

```
DO 4 L=1,IM
```

```
DO 3 J=1,IM
```

```
3 A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
```

```
4 A(L,1)=-A(L+1,1)*B(1)
```

```
DO 5 J=1,I
```

```
5 A(1,J)=B(J)
```

```
RETURN
```

```
10 A(1,1)=1.00/A(1,1)
```

```
RETURN
```

```
END
```

## SUBROUTINE DISTR

C  
C.... SUBROTINA DESTINA-SE A CORRIGIR ERROS SISTEMATICOS INTRODUCIDOS  
C.... PELA DISTORCAO OTICA DO SISTEMA DE LENTES DA CAMARA  
C.... FOTOGRAMETRICA

C  
C.... SERA CODIFICADA QUANDO CONVENIENTE

C  
C.... EXPRESSOES A SEREM UTILIZADAS  
C....  $\Delta X = X_{FOTO}(K1 \cdot R^{**2} + K2 \cdot R^{**4} + K3 \cdot R^{**6} + \dots)$   
C....  $\Delta Y = Y_{FOTO}(K1 \cdot R^{**2} + K2 \cdot R^{**4} + K3 \cdot R^{**6} + \dots)$   
C....  $X_{FOTO} = X_{FOTO} - \Delta X$   
C....  $Y_{FOTO} = Y_{FOTO} - \Delta Y$

DISTO

C  
C.... SENDO  
C....  $R = (X_{FOTO}^{**2} + Y_{FOTO}^{**2})^{**0.5}$   
C.... K1,  
C.... K2,  
C.... K3 = COEFICIENTES DA DISTORCAO OTICA

C  
RETURN  
END

```
SUBROUTINE REFRAC(XFOTO,YFOTO,NIMAGE,EFE,ZS,ZP)
```

```
C
```

```
C.... SUBROTINA DESTINA-SE CORRIGIR ERRO SISTEMATICO DEVIDO
```

```
C.... REFRAÇÃO ATMOSFERICA
```

```
C.... EH USADA FORMULA APROXIMADA DE SAASTAMCINEN PARA
```

```
C.... ATMOSFERA PADRAO USSA-1962 (VALIDA ATE ZS=9)
```

```
C
```

```
C.... ZS = ALTITUDE DO AVIAC EM QUILOMETROS
```

```
C.... ZP = ALTITUDE MEDIA DO TERRENO, EM QUILOMETROS
```

```
C.... EPSLON = REFRACAO FOTOGRAFICA PARA ALFA = 45, EM RADIANS
```

```
REFR,
```

```
C
```

```
C
```

```
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION XFOTO(NIMAGE),
```

```
- YFOTO(NIMAGE)
```

```
EPSLON=(13.000*(ZS-ZP))*((1.000-2.00-2*(2.000*ZS+ZP))*1.00-6)
```

```
C
```

```
DO 10 I=1,NIMAGE
```

```
R2=XFOTO(I)**2+YFOTO(I)**2
```

```
DELTAX=XFOTO(I)*((R2/(EFE**2))+1.000)*EPSLON
```

```
DELTAY=YFOTO(I)*((R2/(EFE**2))+1.000)*EPSLON
```

```
XFOTO(I)=XFOTO(I)-DELTAX
```

```
YFOTO(I)=YFOTO(I)-DELTAY
```

```
10 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE MRGT2(SENW,CCSW,SENF1,COSFI,SENK,CCSK,AM2)
```

```
C
```

```
C..... SUBROUTINA CALCULA MATRIZ DE ROTACAO
```

```
C.....      AM2=R(CA)*R(FI)*R(W)
```

```
C.....      SAO RECEBIDOS DO MODULO QUE CHAMA CS SENOS
```

```
C.....      E COSENOS DOS ANGULOS W,FI,CA
```

```
C
```

```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
      DIMENSION AM2(3,3)
```

```
C
```

```
      AM2(1,1)=CCSF1*CCSK
```

```
      AM2(1,2)=CCSW*SENK+SENW*SENF1*CCSK
```

```
      AM2(1,3)=SENW*SENK-COSW*SENF1*CCSK
```

```
      AM2(2,1)=-COSFI*SENK
```

```
      AM2(2,2)=CCSW*CCSK-SENW*SENF1*SENK
```

```
      AM2(2,3)=SENW*CCSK+COSW*SENF1*SENK
```

```
      AM2(3,1)=SENF1
```

```
      AM2(3,2)=-SENW*CCSF1
```

```
      AM2(3,3)=CCSW*COSFI
```

```
C
```

```
      RETURN
```

```
      END
```

```
      SUBROUTINE MNG(X,Y,Z,XC,YO,ZO,AM2,AM,AN,AQ)
```

```
      C
```

```
      C.... SUBROUTINA CALCULA VALORES DE M,N,Q
```

```
      C....      DAS EQUACOES PROJETIVAS
```

```
      C
```

```
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
      DIMENSION AM2(3,3)
```

```
      C
```

```
      AM=AM2(1,1)*(X-XC)+AM2(1,2)*(Y-YO)+AM2(1,3)*(Z-ZO)
```

```
      AN=AM2(2,1)*(X-XC)+AM2(2,2)*(Y-YO)+AM2(2,3)*(Z-ZO)
```

```
      AQ=AM2(3,1)*(X-XC)+AM2(3,2)*(Y-YO)+AM2(3,3)*(Z-ZO)
```

```
      C
```

```
      RETURN
```

```
      END
```

SUBROUTINE DERIVY(EFE, SENW, COSW, SENFI, COSFI, SENK, CCSK, XO, YO, ZO, X, Y  
 -, Z, AM2, AM, AN, AQ, DFYXO, DFYYO, DFYZO, DFYW, DFYFI, DFYK, DFYX, DFYY, DFYZ)

```

C
C.... SUBROUTINA CALCULA AS DERIVADAS DE
C.... F(Y)=YFOTG-EFE(AN/AQ)
C.... EM RELACAO AOS PARAMETROS
C
  IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
  DIMENSION AM2(3,3)
C
  DELTAX=X-XC
  DELTAY=Y-YC
  DELTAZ=Z-ZC
  AUX1=(EFE/AQ**2)
C
  DFYXO=AUX1*(AQ*AM2(2,1)-AN*AM2(3,1))
  DFYYO=AUX1*(AQ*AM2(2,2)-AN*AM2(3,2))
  DFYZO=AUX1*(AQ*AM2(2,3)-AN*AM2(3,3))
C
  AAUX10=AQ*(DELTAX*AM2(2,2)-DELTAY*AM2(2,3))
  AAUX11=AN*(DELTAY*AM2(3,3)-DELTAX*AM2(3,2))
  DFYW=-AUX1*(AAUX10+AAUX11)
C
C
  AAUX20=DELTAX*SENK*SENFI
  AAUX21=DELTAY*SENK*COSFI*SENW
  AAUX22=DELTAX*SENK*COSFI*CCSW
  AAUX23=-AQ*(AAUX20-AAUX21+AAUX22)
C
  AAUX30=DELTAX*COSFI
  AAUX31=DELTAY*SENFI*SENW
  AAUX32=DELTAX*SENFI*COSW
  AAUX33=AN*(AAUX30+AAUX31-AAUX32)
C
  DFYFI=AUX1*(AAUX23+AAUX33)
C
C
  AAUX40=DELTAX*AM2(1,1)
  AAUX41=DELTAY*AM2(1,2)
  AAUX42=DELTAX*AM2(1,3)
  AAUX43=EFE/AQ
C
  DFYK=AAUX43*(AAUX40+AAUX41+AAUX42)
C
  DFYX=-DFYXO
  DFYY=-DFYYO
  DFYZ=-DFYZO
C
  RETURN
  END

```

SUBROUTINE DERIVX(EFE,SENH,CCSW,SENF,CCSFI,SENK,COSK,XO,YO,ZO,X,Y  
- ,Z,AM2,AM,AN,AQ,DFXXO,DFXYO,DFXZO,DFXW,DFXF1,DFXK,DFXX,DFXY,DFXZ)

C

C.... SUBROUTINA CALCULA AS DERIVADAS DE

C.... F(X)=XFCTC-EFE(AM/AQ)

C.... EM RELACAO ACS PARAMETROS

C

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

DIMENSION AM2(3,3)

C

DELTAX=X-XC

DELTAY=Y-YC

DELTAZ=Z-ZC

AUX1=(EFE/AQ\*\*2)

DERI

C

DFXXO=AUX1\*(AQ\*AM2(1,1)-AM\*AM2(3,1))

DFXYO=AUX1\*(AQ\*AM2(1,2)-AM\*AM2(3,2))

DFXZO=AUX1\*(AQ\*AM2(1,3)-AM\*AM2(3,3))

C

AAUX10=AQ\*(DELTAY\*AM2(1,3)-DELTAZ\*AM2(1,2))

DERI

AAUX11=AM\*(DELTAY\*AM2(3,3)-DELTAZ\*AM2(3,2))

DERI

DFXW=AUX1\*(AAUX10-AAUX11)

DERI

C

C

AAUX20=DELTAX\*COSK\*SENF1

DERI

AAUX21=DELTAY\*COSK\*CCSFI\*SENH

DERI

AAUX22=DELTAZ\*COSK\*CCSFI\*CCSW

DERI

AAUX23=AQ\*(AAUX20-AAUX21+AAUX22)

DERI

C

AAUX30=DELTAX\*CCSFI

DERI

AAUX31=DELTAY\*SENF1\*SENH

DERI

AAUX32=DELTAZ\*SENF1\*COSK

DERI

AAUX33=AM\*(AAUX30+AAUX31-AAUX32)

DERI

C

DFXF1=AUX1\*(AAUX23+AAUX33)

DERI

C

C

AAUX40=DELTAX\*AM2(2,1)

DERI

AAUX41=DELTAY\*AM2(2,2)

DERI

AAUX42=DELTAZ\*AM2(2,3)

DERI

AAUX43=-EFE/AQ

DERI

C

DFXK=AAUX43\*(AAUX40+AAUX41+AAUX42)

DERI

C

DFXX=-DFXXC

DFXY=-DFXYC

DFXZ=-DFXZC

C

RETURN

END



```
      SUBROUTINE RADGRA(ANGLO1,ANGLO2,ANGLC3)
```

```
      C
```

```
      C.... SUEROTINA TRANSFORMA ANGULOS FORNECIDOS
```

```
      C          EM RADIANGS PARA GRAUS E DECIMOS
```

```
      C
```

```
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
      GRAU=1.D0/17453293.D-9
```

```
      ANGLO1=ANGLO1*GRAU
```

```
      ANGLO2=ANGLC2*GRAU
```

```
      ANGLO3=ANGLC3*GRAU
```

```
      RETURN
```

```
      END
```

```
SUBROUTINE TRANS3(AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,X,Y,Z,AUX5,AUX6,AUX7,X1,Y1,Z
-1)
```

```
C
C.... SUBROTINA EFETUA TRANSFORMACAO COORDENADAS GEODESICAS LOCAIS
C.... (X,Y,Z) PARA COORDENADAS CARTESIANAS GEODESICAS (X1,Y1,Z1)
C.... TODAS COORDENADAS EXPRESSAS EM METROS
```

```
C
C.... AUX1,AUX2,AUX3,AUX4,AUX5,AUX6,AUX7 COMO DEFINIDO NO PROGRAMA
C.... PRINCIPAL
```

```
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
```

```
C
      X1=(-X*AUX3-Y*AUX1*AUX4+Z*AUX2*AUX4+AUX5)
      Y1=(X*AUX4-Y*AUX1*AUX3+Z*AUX2*AUX3+AUX6)
      Z1=(Y*AUX4+Z*AUX1+AUX7)
```

```
C
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE TRANS4(X1,Y1,Z1,A,E2,XLAT,XLNG,H,\*)

C  
C.... SUBROTINA EFETUA TRANSFORMACAO COORDENADAS CARTESIANAS GEODE-  
C.... SICAS (X1,Y1,Z1) PARA COORDENADAS GEODESICAS ELIPSÓIDICAS  
C.... (XLAT,XLNG,H)  
C  
C.... (X1,Y1,Z1) EXPRESSOS EM METROS  
C.... XLAT,XLNG EXPRESSOS EM GRAUS E DECIMOS  
C.... H EXPRESSOS EM METROS  
C  
C.... A = SEMI-EIXO MAIOR DO ELIPSOIDE ADOTADO, EM METROS  
C.... E2 = EXCENTRICIDADE DO ELIPSOIDE ADOTADO  
C.... GNOMAL = GRANDE NORMAL  
C

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)

XLAT=0.00

XLAT1=0.00

GNOMAL=A

EPSLEN=1.0D-9

INTER=0

TRANS

C  
C.... CALCULO DA LATITUDE  
C

SENLAT=DSIN(XLAT1)

5 XLAT=CATAN((Z1+GNOMAL\*E2\*SENLAT)/DSQRT(X1\*\*2+Y1\*\*2))

DLTLAT=XLAT-XLAT1

IF(DTLAT.LE.EPSLEN) GO TO 10

C ELSE

INTER=INTER+1

IF(INTER.GT.9) RETURN 1

XLAT1=XLAT

SENLAT=DSIN(XLAT1)

SENF12=SENLAT\*\*2

GNOMAL=A/DSQRT(1-E2\*SENF12)

GO TO 5

TRANS

C  
C.... CALCULO DA LONGITUDE  
C

10 XLNG=CATAN(Y1/X1)

C  
C.... CALCULO DA ALTITUDE  
C

SECLAT=1.00/DCOS(XLAT)

SECLNG=1.00/DCOS(XLNG)

H=X1\*SECLAT\*SECLNG-GNOMAL

C  
C.... TRANSFORMACAO PARA GRAUS E DECIMOS  
C

CALL RADGRA(XLAT,XLNG,XLNG)

C  
RETURN  
END

SUBROUTINE INVRTN(ENI,I1C)

C  
C..... SUBROTINA DESTINA-SE A INVERTER A MATRIZ ENI USANDO O METODO  
C..... DE PARTICIONAMENTO

C  
IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

C  
C..... I1C=NFOTGS\*6+NAERG\*3  
C..... I5 =I1C/2

C  
C..... DIMENSION ENI(I1C,I1C),  
C..... B(I5)  
C..... R(I5,I5),  
C..... S(I5,I5),  
C..... A11(I5,I5),  
C..... A12(I5,I5),  
C..... A21(I5,I5),  
C..... A22(I5,I5),  
C..... Q11(I5,I5),  
C..... Q12(I5,I5),  
C..... Q21(I5,I5),  
C..... Q22(I5,I5)

DIMENSION ENI(48,48),  
- B(24),  
- R(24,24),  
- S(24,24),  
- A11(24,24),  
- A12(24,24),  
- A21(24,24),  
- A22(24,24),  
- Q11(24,24),  
- Q12(24,24),  
- Q21(24,24),  
- Q22(24,24)

C  
C..... PARTICIONAMENTO DE ENI

C  
I5=I1C/2  
DO 30 K=1,I5  
DO 30 J=1,I5  
A11(K,J)=ENI(K,J)  
A12(K,J)=ENI(K,J+I5)  
A21(K,J)=ENI(K+I5,J)  
A22(K,J)=ENI(K+I5,J+I5)

30 CONTINUE

C  
C..... OBTENCAO DE Q11

C  
CALL VERSCL(A22,B,I5)  
CALL AB(A12,A22,R,I5,I5,I5)  
CALL AB(R,A21,S,I5,I5,I5)  
DO 35 K=1,I5  
DO 35 J=1,I5  
Q11(K,J)=A11(K,J)-S(K,J)  
35 CONTINUE  
CALL VERSCL(Q11,B,I5)

C  
C..... OBTENCAO DE Q21

C  
CALL AB(A22,A21,R,I5,I5,I5)

```
      CALL AB(R,Q11,Q21,15,15,15)
      DO 40 K=1,15
      DO 40 J=1,15
      Q21(K,J)=-Q21(K,J)
40  CONTINUE
C
C.....      GETENCAC DE Q12
C
      DO 45 K=1,15
      DO 45 J=1,15
      Q12(J,K)=Q21(K,J)
45  CONTINUE
C
C.....      GETENCAC DE Q22
C
      CALL AB(R,Q12,S,15,15,15)
      DO 50 K=1,15
      DO 50 J=1,15
      Q22(K,J)=A22(K,J)-S(K,J)
50  CONTINUE
C
C.....      MONTAGEM DE ENI
      DO 60 K=1,15
      DO 60 J=1,15
      ENI(K,J)=Q11(K,J)
      ENI(K,J+15)=Q12(K,J)
      ENI(K+15,J)=Q21(K,J)
      ENI(K+15,J+15)=Q22(K,J)
60  CONTINUE
C
      RETURN
      END
```